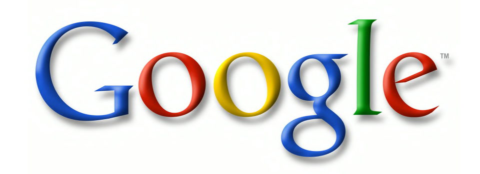






ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLOBORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster.
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

TOME XVIII.

HAARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1883.

TABLE DES MATIÈRES.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR LA

FONCTION RATIONNELLE ENTIÈRE D'UNE VARIABLE COMPLEXE,

PAR

T. J. STIELTJES.

---

§ 1. Soit $f(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_n$ une expression rationnelle entière en z, du degré n.

La démonstration donnée par Cauchy pour le théorème fondamental de l'algèbre, démonstration qui à raison de sa simplicité est entrée dans divers Traités élémentaires (Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis;* v. d. Ven, *Theorie en oplossing der hoogere machtsvergelijkingen*), revient alors à ce qui suit.

En supposant qu'il ne fût *pas* possible de choisir x et y de telle sorte que, pour $z = x + y\,i$, X et Y devinssent nuls simultanément dans

$$f(z) = X + Y i,$$

l'expression

$$X^2 + Y^2$$

ne pourrait pas non plus s'annuler pour aucun système de valeurs de x et y.

Il en résulterait que cette expression devrait prendre, pour au moins *un* système de valeurs x et y, une valeur positive minimum différente de zéro. Or, cela est impossible, car on fait voir que, quels que soient a et b, à la seule condition que pour $x = a$, $y = b$ l'expression $X^2 + Y^2$ ne soit pas nulle, h et k peuvent toujours être déterminés de façon que, pour $x = a + h$ et $y = b + k$, $X^2 + Y^2$ reçoive une valeur moindre que pour $x = a$, $y = b$.

De la manière dont on établit ce fait, il résulte clairement aussi que $X^2 + Y^2$ ne peut pas non plus acquérir une valeur maximum, circonstance qui est d'ailleurs indifférente pour la démonstration de Cauchy.

Mais $\sqrt{X^2 + Y^2}$ est le module de $f(z)$ et, lorsque $a_1, a_2 \ldots a_n$ sont les points radicaux de l'équation $f(z) = 0$, égal au produit des distances de z à $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Ces simples réflexions suffisent donc pour montrer que la proposition plus d'une fois énoncée (voir, entre autres, *Compt. Rendus de l'Acad. d. Sc.*, Tom. LXXXIX, p. 226), que le module de $f(z)$ prend aux points radicaux de l'équation $\frac{d f(z)}{d z} = 0$ une valeur maximum ou minimum, doit être inexacte. Mettre mieux en lumière les circonstances qui se produisent alors, tel est le but des premières considérations qui vont être développées et dans lesquelles je regarderai comme déjà prouvée la possibilité de la décomposition de $f(z)$ en facteurs linéaires.

Exprimée sous une forme purement géométrique, la remarque faite ci-dessus peut être énoncée en ces termes: étant donnés dans un plan n points fixes $a_1, a_2, \ldots a_n$, et en outre un point variable z, le produit des distances de z à $a_1, a_2, \ldots a_n$ ne prend jamais une valeur maximum ou minimum, sauf lorsque le point z coïncide avec un des points $a_1, a_2, \ldots a_n$. Plusieurs des points $a_1, a_2, \ldots a_n$ peuvent d'ailleurs aussi coïncider entre eux.

§ 2. Dans la démonstration suivante de cette proposition, il ne sera d'abord aucunement question de sa relation avec la théorie des équations algébriques.

Pour point de départ, je prends donc le développement en série connu:

$$(1)\ldots\ lg\,(\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2})=-a\cos\varphi-\tfrac{1}{2}a^2\cos 2\varphi-\ldots=-\sum_{p=1}^{p=\infty}\tfrac{1}{p}a^p\cos p\varphi,$$

valable pour $-1 < a < +1$ et pour des valeurs quelconques de φ. Ce développement peut servir de la manière suivante à comparer entre elles, en deux points voisins, les valeurs du produit des distances de z à $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Soient B et C ces deux points, r et φ les coordonnées polaires de C par rapport à un système d'axes ayant B pour origine, R_1 et u_1 les coordonnées polaires du point radical a_1 par rapport à ce même système; on a alors:

$$Ca_1 = \sqrt{R_1^2 - 2\,R_1\,r\cos(\varphi - u_1) + r^2},$$

donc $$lg\ Ca_1 = lg\,R_1' + lg\sqrt{1-2\frac{r}{R_1}\cos(\varphi-u_1)+\frac{r^1}{R^2}}.$$

En supposant $r < R_1$, on a donc, d'après (1),

$$lg\ Ca_1 = lg\ Ba_1 - \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\,\frac{r^p}{R_1^p}\cos p\,(\varphi - u_1).$$

Si R_2, u_2; $R_3\,u_3$ sont les coordonnées polaires de $a_2, a_3\ldots$ dans le système d'axes adopté, et si r est plus petit que R_2, $R_3\ldots$, on a pareillement:

$$log\ Ca_2 = log\ Ba_2 - \sum_1^{\infty}\frac{1}{p}\,\frac{r^p}{R_2^p}\cos p\,(\varphi - u_2)$$

$$log\ Ca_3 = log\ Ba_3 - \sum_1^{\infty}\frac{1}{p}\,\frac{r^p}{R_3^p}\cos p\,(\varphi - u_3)$$

etc.,

et par l'addition de toutes ces équations nous obtenons:

$$(2)\ldots lg\,(Ca_1 . Ca_2 .. Ca_n) = lg\,(Ba_1 . Ba_2 \ldots Ba_u) + \Sigma\, k_p r^p \ ,$$

où

$$(3)\ldots.\qquad k_p = -\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{t=n}\frac{\cos p\,(\varphi - u_t)}{R_t^p}.$$

Puisque B est regardé, de même que $a_1, a_2, \ldots a_n$, comme fixe, C seul étant supposé variable, nous pouvons réduire k_p à une forme encore plus simple en posant:

$$(4)\ldots.\qquad \begin{cases} M_p \cos \alpha_p = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{t=1}^{t=n}\dfrac{\cos p\, u_t}{R_t^p} \\ M_p \sin \alpha_p = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{t=1}^{t=n}\dfrac{\sin p\, u_t}{R_t^p} \end{cases}$$

M_p, α_p sont alors également constants et il vient:

$$(5)\ldots.\qquad k_p = M_p \cos (p\,\varphi - \alpha_p),$$

donc

$$\log\,(Ca_1 . Ca_2 .. Ca_n) = \log\,(Ba_1 . Ba_2 .. Ba_n) + M_1\, r \cos (\varphi - \alpha_1)$$
$$+ M_2\, r^2 \cos (2\,\varphi - \alpha_2) + M_3\, r^3 \cos (3\,\varphi - \alpha_3) + \ldots.$$

Il doit toujours être satisfait ici à la condition que r soit moindre que R_1, $R_2 \ldots$; en d'autres termes, le point C doit être situé à l'intérieur du cercle qui a B pour centre et un rayon égal à la plus petite des distances R_1, $R_2 \ldots$ Dans tout ceci, il est à peine besoin de le dire, on admet que B ne coïncide pas avec l'un des points $a_1 .. a_n$.

En ce qui concerne les nombres positifs M_1, M_2, $M_3 \ldots$, on voit aisément qu'ils ne peuvent pas tous être égaux à zéro; mais il est très possible que quelques-uns des premiers soient nuls. Admettons que dans la série M_1, $M_2 \ldots$, M_s soit le premier nombre différent de zéro, et qu'on ait par conséquent:

$$(6)\ldots\begin{cases} lg\,(Ca_1\,.\,Ca_2\,..\,Ca_n) = lg\,(Ba_1\,.\,Ba_2\,..\,Ba_n) + T \\ T = M_s\, r^s \cos(s\varphi - \alpha_s) + M_{s+1}\, r^{s+1} \cos\Big((s+1)\varphi - \alpha_{s+1}\Big) + \ldots \end{cases}$$

Nous avons maintenant à rechercher comment la valeur de T varie avec le point C, c'est-à-dire, lorsque r et φ seuls prennent d'autres valeurs.

Remarquons d'abord que la série

$$M_s r^s + M_{s+1} r^{s+1} + M_{s+2} r^{s+2} + \ldots.$$

est également convergente, tant que r reste moindre que le plus petit des nombres $R_1, R_2 \ldots R_n$; cela se déduit aisément de (4). Il en résulte que la série

$$sM_s \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (s+1)\, M_{s+1}\, r - (s+2) M_{s+2}\, r^2 - (s+3)\, M_{s+3}\, r^3 - \ldots$$

converge aussi pour ces valeurs de r, et comme, pour $r = 0$, cette dernière série a pour somme la valeur positive différente de zéro $s\, M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, on pourra donner aussi à r une valeur, positive et différente de zéro, telle qu'on ait:

$$(7)\quad s\, M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (s+1)\, M_{s+1}\, r - (s+2)\, M_{s+2}\, r^2 - \ldots > 0.$$

Simultanément, on a alors:

$$(8)\qquad M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}} - M_{s+1}\, r - M_{s+2}\, r^2 - \ldots > 0.$$

Supposons maintenant qu'en (6) r reçoive une valeur positive satisfaisant aux conditions (7) et (8), et faisons alors varier φ seul, de manière à considérer des points C situés sur un cercle décrit du rayon r autour de B.

De (6), il suit:

$$\frac{dT}{d\varphi} = -s\, M_s\, r^s \sin(s\varphi - \alpha_s) - (s+1)\, M_{s+1}\, r^{s+1} \sin\Big((s+1)\varphi - \alpha\Big) - \ldots,$$

et, par (7) et (8), on reconnaît immédiatement que, tant que

la valeur absolue de $cos\,(s\,\varphi - \alpha_s)$ n'est pas inférieure à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, T a le même signe que $cos\,(s\,\varphi - \alpha_s)$. De même, tant que la valeur absolue de $sin\,(s\,\varphi - \alpha_s)$ n'est pas inférieure à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{d\,T}{d\,\varphi}$ et $sin\,(s\,\varphi - \alpha_s)$ ont des signes contraires.

Pour obtenir toutes les valeurs de T correspondant à une valeur déterminée de r, il suffit de donner à φ, à partir d'une valeur initiale quelconque, un accroissement égal a $2\,\pi$, ce qui fait croître $s\,\varphi - \alpha_s$ de la quantité $2\,\pi\,s$.

Distinguons, dans cet accroissement, les $4\,s$ intervalles suivants:

$$\text{I} \quad s\,\varphi - \alpha_s \text{ de } -\frac{\pi}{4} \text{ à } +\frac{\pi}{4}$$

$$\text{II} \quad s\,\varphi - \alpha_s \text{ de } +\frac{\pi}{4} \text{ à } +3\,.\frac{\pi}{4}$$

$$\text{III} \quad s\,\varphi - \alpha_s \text{ de } +3.\frac{\pi}{4} \text{ à } +5\,.\frac{\pi}{4}$$

. . . .

enfin $(4\,s)$ $s\,\varphi - \alpha_s$ de $(8\,s-3)\,\frac{\pi}{4}$ à $(8\,s-1)\,\frac{\pi}{4}$.

Dans les premier, troisième, cinquième ... intervalles, la valeur absolue de $cos\,(s\,\varphi - \alpha_s)$ est plus grande que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et alternativement positive et négative. Par conséquent, dans les premier, cinquième, neuvième .... intervalles, T est positif, dans les troisième, septième ... intervalles, T est négatif.

Dans les deuxième, quatrième, sixième .... intervalles, la valeur absolue de $sin\,(s\,\varphi - \alpha_s)$ est plus grande que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et alternativement positive et négative. Par conséquent, dans les deuxième, sixième ... intervalles, $\frac{d\,T}{d\,\varphi}$ est partout négatif, dans les quatrième, huitième .... intervalles, partout positif.

Au commencement du second intervalle, T est positif pour $s\,\varphi - \alpha_s = \frac{\pi}{4}$, à la fin, négatif pour $s\,\varphi - \alpha_s = 3\,\frac{\pi}{4}$, et dans tout l'intervalle $\frac{d\,T}{d\,\varphi}$ est négatif; T devient donc, dans ce

second intervalle, une fois égal à zéro. A l'origine du quatrième intervalle, T est négatif, à la fin, positif, et dans tout l'intervalle $\frac{dT}{d\varphi}$ est positif; T devient donc, dans le quatrième intervalle, une fois égal à zéro, etc.

Il est évident que T s'annule pour $2s$ valeurs différentes de φ, et que chaque fois il change de signe.

Or, on a $Ca_1 . Ca_2 \ldots Ca_n \gtreqless Ba_1 . Ba_2 \ldots Ba_n$, suivant que $T \gtreqless 0$; il ressort donc, de ce qui précède, qu'au voisinage du point B il y a aussi bien des points C pour lesquels $Ca_1 . Ca_2 \ldots Ca_n$ est plus grand que $Ba_1 . Ba_2 \ldots Ba_n$, que des points pour lesquels le premier produit est plus petit que le second. D'un maximum ou d'un minimum de ce produit au point B, il ne saurait donc être question. Mais le point B a été pris tout à fait arbitrairement, sauf qu'il ne devait coïncider avec aucun des points $a_1, a_2 \ldots a_n$; ce qui a été dit au § 1 se trouve donc démontré.

---

§ 3. Les conditions (7) et (8) sont de telle nature que, lorsqu'elles sont remplies par une certaine valeur positive de r, toutes les valeurs positives plus petites y satisfont également. Or, il est facile de montrer qu'en prenant r suffisamment petit, on peut faire que les valeurs de φ pour lesquelles T devient $= 0$ diffèrent aussi peu qu'on le désire des valeurs pour lesquelles $\cos(s\varphi - \alpha_s)$ s'annule. Considérons, par exemple, la racine située dans le second intervalle pour laquelle $s\varphi - \alpha_s$ est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $3\frac{\pi}{4}$, et prenons deux valeurs φ_1, φ_2, telles qu'on ait

$$s\varphi_1 - \alpha_s < \frac{\pi}{2} < s\varphi_2 - \alpha_s,$$

la différence $\varphi_2 - \varphi_1$ pouvant d'ailleurs être aussi petite qu'on le veut.

Dans $$T(\varphi_1) = M_s\, r^s \cos(s\,\varphi_2 - \alpha_s) + \ldots$$
le premier terme est alors positif, dans
$$T(\varphi_2) = M_s\, r^s \cos(s\,\varphi_2 - \alpha_s) + \ldots$$
le premier terme est négatif. On peut maintenant prendre r assez petit pour que $T(\varphi_1)$ lui-même soit positif, $T(\varphi_2)$ négatif, et pour que cela reste vrai quand r continue à décroître. Pour une pareille valeur de r, et pour toutes les valeurs plus petites, l'équation $T(\varphi) = 0$ possède alors évidemment une racine entre φ_1 et φ_2.

On voit donc que la ligne pour laquelle $T = 0$, a en B un point multiple d'ordre s. Les tangentes menées en B aux s branches forment entre elles des angles égaux à $\frac{\pi}{s}$. Un petit cercle, décrit autour de B, est divisé par la ligne $T = 0$ en $2\,s$ secteurs. A l'intérieur de chaque secteur, T conserve le même signe, et dans les secteurs successifs, T est alternativement positif et négatif.

La condition $T = 0$ est équivalente à $Ca_1 \,.\, Ca_2 \,..\, Ca_n = Ba_1 \,.\, Ba_2 \,..\, Ba_n$.

Si le point B est choisi arbitrairement, M_1 ne sera pas, en général, égal à zéro; dans les considérations qui précèdent, on a alors $s = 1$, et B est un point simple de la courbe $Ca_1 \,.\, Ca_2 \,..\, Ca_n = Ba_1 \,.\, Ba_2 \,..\, Ba_n$.

---

§ 4. Pour découvrir la signification des conditions $M_1 = 0$, $M_2 = 0, \ldots$, il convient de se reporter de nouveau à la théorie des équations algébriques.

A cet effet, introduisons un nouveau système d'axes rectangulaires, où l'axe des x soit parallèle à la droite à partir de laquelle les angles sont comptés dans le système polaire, ayant pour

origine B, dont nous nous sommes servis jusqu'ici, et où les directions des axes des x et y positifs correspondent à $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$. Soient x et y les coordonnées de B dans ce nouveau système, et $z = x + yi$ une quantité variable complexe. Les points $a_1, a_2 \ldots$ peuvent alors représenter les nombres complexes $z_1, z_2 \ldots$, C le nombre $z + t$, de sorte que $t = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Soit enfin $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$,

il en résulte

$$\log f(z+t) = \log f(z) + lg\left(1 + \frac{t}{z - z_1}\right) + lg\left(1 + \frac{t}{z - z_2}\right) + \ldots + lg\left(1 + \frac{t}{z - z_n}\right)$$

et, lorsque mod. t est plus petit que les modules de $z - z_1$, $z - z_2, \ldots z - z_n$,

$$(9) \ldots \left\{ \begin{aligned} \log f(z+t) = \log f(z) + \; & t\left(\frac{1}{(z-z_1)} + \frac{1}{(z-z_2)} + \ldots + \frac{1}{(z-z_n)}\right) \\ & - \tfrac{1}{2} t^2 \left(\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{1}{(z-z_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(z-z_n)^2}\right) \\ & + \tfrac{1}{3} t^3 \left(\frac{1}{(z-z_1)^3} + \frac{1}{(z-z_2)^3} + \ldots + \frac{1}{(z-z_n)^3}\right). \end{aligned} \right.$$

Or on a:

$z - z_1 = -R_1(\cos u_1 + i \sin u_1)$, $z - z_2 = -R_2(\cos u_2 + i \sin u_2) \ldots$

d'où l'on déduit, pour le coefficient de t^p dans (9):

$$(-1)^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{t=n} \frac{1}{(z-z_t)^p} = -\frac{1}{p} \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\cos p\,u_t - i \sin p\,u_t}{R_t^p}.$$

L'expression à droite est, d'apres (4),

$$= M_p(\cos \alpha_p - i \sin \alpha_p).$$

Si donc on pose encore $t = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, on obtient, en égalant entre elles les parties réelles des deux membres de (9):

$$\log \mathrm{Mod}\, f(z+t) = \log \mathrm{Mod}\, f(z) + M_1\, r \cos(\varphi - \alpha_1) + M_2\, r^2 \cos(2\varphi - \alpha_2) + \ldots$$

ce qui est le développement en série du § 2.

Comme d'ailleurs la formule (1) résulte de

$$log\,(1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 \,..$$

quand on y pose $z = a\,e^{\eta i}$ et q'on compare les parties réelles, ce mode de déduction ne diffère pas essentiellement de celui qui a été donné précédemment.

Mais il ressort maintenant que M_1, M_2, M_3 .. sont les modules des coefficients des puissances de t dans (9). Si l'on pose

$$\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = \psi(z),$$

il vient:

$$lg\,f(z+t) = lg\,f(z) + \psi(z)\,t + \frac{1}{2}\,\psi'(z)\,t^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\,\psi''(z)\,t^3 + \ldots$$

et M_1, M_2 ... sont les modules de $\psi(z)$, $\frac{1}{2}\,\psi'(z)$ ...

Or, on a $\qquad f'(z) = \psi(z)\,f(z)$,

d'où il suit:

$$f''(z) = \psi'(z)\,f(z) + \psi(z)\,f'(z)$$

$$f'''(z) = \psi''(z)\,f(z) + 2\,\psi'(z)\,f'(z) + \psi(z)\,f''(z)$$

$$f''(z) = \psi'''(z)\,f(z) + 3\,\psi''(z)\,f'(z) + 3\,\psi'(z)\,f''(z) + \psi(z)\,f'''(z)$$

etc.

Si l'on a donc $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, .. $M_{s-1} = 0$ et M_s non égal à zéro, $f'(z)$, $f'(z)$ .. $f^{s-1}(z)$ sont également nuls et $f^s(z)$ n'est pas nul; en d'autres termes, z est une racine multiple de l'ordre $s-1$ de l'équation $f'(z) = 0$. Et réciproquement: lorsque z est une racine multiple de l'ordre $s-1$ de $f'(z) = 0$, les quantités M_1, M_2 .. M_{s-1} sont égales à zéro et M_s n'est pas égale à zéro.

Après ce qui a été dit au § 3, on voit donc maintenant que les points multiples des courbes pour lesquelles on a $Mod\,f(z) = C$ coïncident avec les points radicaux de $f'(z) = 0$; et c'est seu-

lement pour des valeurs particulières de C, en nombre tout au plus égal à $n-1$, que la courbe $Mod\, f(z) = C$ a de pareils points multiples. Quant à d'autres espèces de points singuliers, elle n'en possède pas, d'après ce qui a été dit au § 2.

§ 5. Ce qui précède nous met en état d'obtenir une idée générale de l'allure des courbes

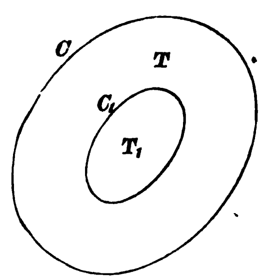
$$Mod.\ f(z) = Constante.$$

Faisons d'abord quelques remarques.

1° Lorsque, à la limite d'un domaine (fini) continu, $Mod.\, f(z)$ a une valeur constante, il faut qu'au moins un des points radicaux $a_1, a_2 \ldots a_n$ soit situé à l'intérieur de ce domaine, et que $Mod.\, f(z)$ ait, pour les points compris dans le domaine une valeur plus petite que la valeur marginale. — En effet, puisque $Mod.\ f(z)$ varie continûment, il doit prendre au moins en un point sa valeur minimum et en un autre point sa valeur maximum. Le minimum ne peut pas se trouver au bord du domaine, car alors le maximum se trouverait à l'intérieur, ce qui, d'après le § 2, n'est pas possible. Les minima tombent donc en dedans du domaine et nous savons que ces minima n'existent qu'aux points radicaux. La valeur marginale, au contraire, est le maximum de $Mod.\, f(z)$, et les valeurs de $Mod.\ f(z)$ à l'intérieur du domaine sont plus petites que cette valeur marginale.

De là, nous pouvons conclure:

2° Qu'un domaine continu, à la limite duquel $Mod.\ f(z)$ est constant, est nécessairement simplement connexe. Car si $Mod.\, f(z)$ avait, par exemple, la même valeur constante le long de la limite du domaine doublement connexe T, il en résulterait, d'après ce qui précède, que, tant en T qu'en T_1, la valeur de $Mod.\ f(z)$ serait moindre qu'aux points de C_1. Or cela ne se peut pas, car, suivant § 2, la courbe le long de laquelle



Mod. $f(z)$ a une valeur constante forme la séparation entre un domaine dans lequel *Mod.* $f(z)$ a une valeur plus petite et un autre domaine, dans lequel *Mod.* $f(z)$ a une valeur plus grande.

Après tout ce qui précède, il est évident que:

3° Si nous isolons un domaine quelconque, mais entièrement limité, qui ne contienne aucun des points radicaux, les maxima et minima de *Mod.* $f(z)$, pour ce domaine, devront être cherchés au bord du domaine.

Rappelons enfin que,

4° lorsque *mod.* z croît indéfiniment, *mod.* $f(z)$ finit aussi par croître au-delà de toute limite.

---

§ 6. Pour que le cas où l'équation $f(z) = 0$ possède des racines multiples soit également compris dans la démonstration, nous supposerons que $z_1, z_2 \dots z_k$ soient les racines non égales de $f(z) = 0$. Si $k < n$, les autres racines, $z_{k+1} \dots z_n$, ne sont donc que des répétitions de $z_1, z_2 \dots z_k$.

L'équation $f'(z) = 0$ a alors $k-1$ racines

$$y_1, y_2 \dots y_{k-1} \tag{10}$$

dont aucune ne coïncide avec $z_1, z_2, \dots z_k$ et qui peuvent être représentées par les points $B_1, B_2 \dots B_{k-1}$. Les autres racines de $f'(z) = 0$ sont en même temps racines de $f(z) = 0$. Il est très possible, toutefois, que parmi les racines $y_1, y_2 \dots y_{k-1}$ il y en ait d'égales, et nous mentionnons expressément que de pareilles racines doivent être censées inscrites en (10) autant de fois que l'indique le degré de la multiplicité.

Soit, en outre,

$$mod.\, f(y_1) = c_1, \; mod.\, f(y_2) = c_2 \dots mod.\, f(y_{r-1}) = c_{k-1};$$

les constantes $c_1, c_2 \dots$ sont donc positives et différentes de

zéro. Comme l'ordre de succession des racines est arbitraire, nous pouvons supposer:

$$c_1 \leqq c_2 \leqq c_3 \ldots \qquad \leqq c_{k-1}.$$

Il convient de remarquer encore qu'on peut avoir, par exemple, $c_1 = c_2$, sans que, pour cela $y_1 = y_2$. Si, par exemple, $f(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots$ a des coefficients réels, et que y_1, y_2 soient des racines complexes, inégales, mais conjuguées, de $f'(z) = 0$, on a évidemment $c_1 = c_2$.

---

§ 7. Les courbes pour lesquelles on a $Mod. f(z) = C$ seront maintenant considérées comme les limites du domaine où $Mod. f(z)$ est moindre que C. Lorsque C croît, ce domaine s'étend donc progressivement, de sorte que le domaine correspondant à une plus petite valeur de C forme toujours une partie du domaine qui appartient à une plus grande valeur de C. — Pour $C = 0$, il n'y a que les k points isolés A_1, $A_2 \ldots A_k$ qui satisfassent à la condition $Mod. f(z) = 0$.

Il est ensuite facile de montrer que, pour des valeurs suffisamment petites de C, le domaine

$$Mod.\ f\ (z) \leqq C$$

se compose de k pièces continues entièrement isolées les unes des autres, dont chacune renferme un des points A_1, $A_2, \ldots A_k$, de sorte que la courbe $Mod. (z) = C$ consiste en k courbes fermées qui entourent les points radicaux A_1, $A_2, \ldots A_k$.

Décrivons en effet, autour de A_1, $A_2, \ldots A_k$, des cercles K_1, $K_2, \ldots K_k$ entièrement isolés les uns des autres, et soit m la valeur minimum de $Mod. f(z)$ sur la circonférence de ces cercles. Pour chaque point P en dehors de ces cercles, on a alors $Mod. f(z) > m$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à consi-

dérer le cercle K où *mod.* z a une valeur constante, et qui, en même temps, satisfait aux conditions:

primo: d'entourer le point P et tous les cercles $K_1 .. K_s$

secundo: que le minimum de *Mod.* $f(z)$ pour les points du cercle soit *plus grand* que m. Il est clair, d'après le § 5, qu'il existe toujours un pareil cercle.

De § 5, 3° il résulte alors que m est le minimum des valeurs de *Mod.* $f(z)$ situées dans le domaine en dehors de $K_1, K_2 .. K_k$ et à l'intérieur de K, de sorte que le module de $f(z)$ en P est plus grand que m. $C.Q.F.D.$

Lorsque $C < m$, le domaine où l'on a

$$Mod.\, f(z) \leqq C$$

ne contient donc aucun point situé en dehors des cercles K_1, $K_2 .. K_k$. D'autre part, il est clair que $A_1, A_2 .. A_k$ appartiennent à ce domaine, et de § 5, 1° et 2°, il suit donc que le domaine *Mod.* $f(z) \leqq C$ est composé de k pièces continues isolées, dont le contour consiste par conséquent en k courbes fermées. Aucune de ces courbes ne peut se couper elle-même.

Si C croît, chacune de ces k pièces continues s'étendra, jusqu'à ce que C atteigne la valeur c_1. Supposons d'abord $c_1 < c_2$, la courbe *Mod.* $f(z) = c_1$ a alors, d'après § 2, en B_1 un point double, et les deux branches se coupent à angle droit. Décrivons autour de B_1 comme centre, avec un rayon suffisamment petit, un cercle; celui-ci sera divisé en quatre secteurs S_1, S_2, S_3, S_4.

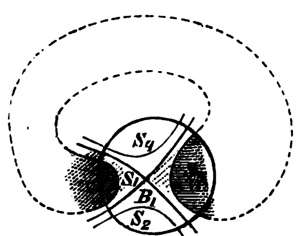
Soit, dans les secteurs S_1, S_3, *Mod.* $f(z) < C_1$, dans les secteurs S_2, S_4, *Mod.* $f(z) > c_1$.

Si h est une quantité positive suffisamment petite, le domaine *Mod.* $f(z) \leqq c_1 - h$ s'étendra donc dans S_1 et S_3 mais non jusqu'au point B_1, de sorte que ces pièces ne se réunissent point à l'intérieur du cercle. La courbe *Mod.* $f(z) = c_1 + h$, au contraire, pénètre dans S_2 et S_4, et la partie du domaine *Mod.* $f(z) = c_1 + h$, située à l'intérieur du cercle, est continue.

Ainsi, au moment où C dépasse la valeur c_1, deux pièces séparées du domaine $Mod. f(z) \leqq C$ se réunissent. Le nombre des pièces continues distinctes du domaine

$$Mod. f(z) \leqq C$$

est donc pour $C = c_1 + h$ égal à $k - 1$. Cette conclusion suppose, toutefois, que les deux pièces de $Mod. f(z) \leqq c_1 - h$ qui pénètrent à l'intérieur du cercle ne s'unissent pas non plus entre elles dans leur prolongement en dehors du cercle (comme il arriverait, par exemple, si ce prolongement avait lieu de la manière indiquée, dans la figure, par des lignes pointillées).



On reconnaît de suite que tel est réellement le cas, en réfléchissant que, s'il en était autrement, il en résulterait évidemment un domaine doublement connexe au contour duquel on aurait $Mod. f(z) = c_1 + h$, ce qui, d'après § 5.2°, n'est pas possible.

Si l'on a $y_1 = y_2$, de sorte que les points B_1, B_2 coïncident, on a aussi $c_1 = c_2$ et B_1 est un point triple de la courbe $Mod. f(z) = c_1$; un cercle suffisamment petit, décrit autour de B_1, est alors partagé en 6 secteurs, à l'intérieur desquels $Mod. f(z)$ est alternativement plus grand et plus petit que c_1.

On voit facilement que, dans ce cas, le nombre des pièces distinctes du domaine $Mod. f(z) C <$ diminue de deux unités au moment où la valeur $c_1 = c_2$ est dépassée.

Il en est de même lorsqu'on a $c_1 = c_2$ sans avoir $y_1 = y_2$. La courbe $Mod. f(z) = c_1$ a alors deux points doubles, en B_1 et B_2.

Il est facile de comprendre comment ces considérations se laissent poursuivre; chaque fois qu'une ou plusieurs des valeurs $c_1, c_2 .. c'_{k-1}$ sont dépassées, le nombre des pièces séparées du domaine $Mod. f(z) \leqq c$ diminue d'un nombre égal à celui de ces valeurs $c_1, c_2 .. c_{k-1}$. Si donc on a $C < c_{k-1}$, la

ligne *Mod.* $f(z) = C$ consiste en une courbe fermée unique, qui entoure tous les points radicaux. Comme règle générale, on peut établir que, lorsque C n'est pas égal à l'une des constantes $c_1, c_2 \ldots c_{k-1}$, et que t de ces constantes sont plus grandes que C, la ligne

$$Mod.\, f(z) = C$$

se compose de $t+1$ courbes fermées isolées les unes des autres, qui, ensemble, entourent tous les points radicaux $A_1, A_2 \ldots A_k$.

---

§ 8. Pour éclaircir ce qui précède, je choisirai l'exemple

$$f(z) = z^4 + z^3 - 2.$$

On a alors:

$$z_1 = +1$$
$$z_2 = -1.5437$$
$$z_3 = -0.2282 + 1.1151\, i$$
$$z_4 = -0.2282 - 1.1151\, i;$$

puis:

$$f'(z) = 4z^3 + 3z^2$$

$$y_1 = 0 \qquad c_1 = 2$$
$$y_2 = 0 \qquad c_2 = 2.$$
$$y_3 = -\tfrac{3}{4} \qquad c_3 = 2\tfrac{27}{256}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer, sur les lignes

$$Mod.\, f(z) = 2$$
$$Mod.\, f(z) = 2\tfrac{27}{256},$$

un nombre de points suffisants pour que leur allure se dessine clairement.

En ce qui concerne la première de ces lignes, puisque *Mod.* $f(z) = 2$, on doit avoir

$$f(z) = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

J'ai donc, pour différentes valeurs de α, calculé chaque fois les quatre racines de cette équation du 4[e] degré. Comme le changement de α en $-\alpha$ fait manifestement passer z à sa valeur conjuguée, il suffisait de prendre α entre 0 et 180°. De cette manière ont été obtenues les valeurs du tableau I. A cause de la variation rapide des racines lorsque α approche de 180°, il était nécessaire de calculer encore quelques autres points de la ligne $Mod.\ f(z) = 2$; mais, pour ceux-là, il eût été moins convenable de conserver α pour argument. Aussi les valeurs données dans le tableau Ia ont-elles été trouvées d'une autre manière.

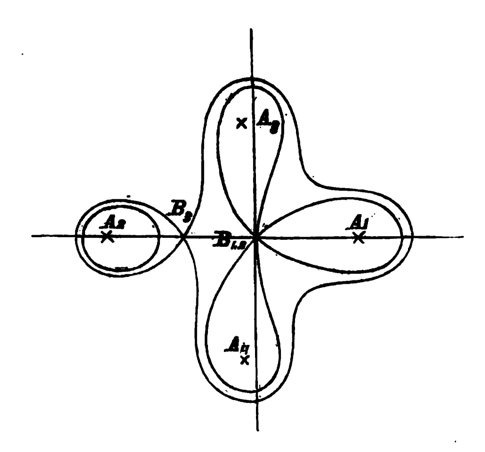
On a opéré de même pour la ligne $Mod.\ (z) = 2\frac{27}{256}$.

Dans le tableau II, sont indiquées les racines de l'équation

$$f(z) = 2\tfrac{27}{256}\ (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

tandis que le tableau IIa fait encore connaître quelques autres points de la ligne $Mod.\ f(z) = 2\frac{27}{256}$.

La figure ci-contre donne une idée suffisante de la forme de ces courbes, qui, au moyen des valeurs consignées dans les



tableaux, pourraient être représentées avec encore plus d'exactitude sur un dessin à échelle moins réduite.

Si l'on a $E < 2$, la ligne

$$Mod. f(z) = C$$

est composée de 4 courbes fermées, entourant A_1, A_2, A_3, A_4.

Dans le cas de $2 < c < 2\frac{27}{256}$, la ligne est composée de deux courbes fermées; dont l'une entoure A_1, A_3, A_4, l'autre, A_2. Pour $c > 2\frac{27}{256}$, la ligne consiste en une seule courbe fermée, qui enveloppe tous les points A_1, A_2, A_3, A_4.

---

§ 9. Considérons encore une fois, pour une valeur quelconque de C, la ligne $Mod. f(z) = C$. Cette ligne se compose alors d'un certain nombre de courbes fermées

$$K_1, K_2, \ldots . K_s,$$

qui n'ont pas de points communs et à l'intérieur desquelles sont situés tous des points radicaux A_1, $A_2, \ldots A_k$. Lors même que ces lignes, pour certaines valeurs particulières de C, auraient entre elles quelque point commun, leur prolongement, lorsqu'on les considère comme les limites du domaine où $Mod. f(z)$ est $< C$, n'en serait pas moins complètement déterminé.

Désignons par $n_1, n_2, \ldots n_s$ les nombres des racines de $f(z) = 0$ qui sont situées à l'intérieur de $K_1, K_2, \ldots K_s$, de sorte qu'on ait

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n,$$

les racines égales étant comptées d'après le degré de leur multiplicité.

Si maintenant la variable z parcourt la ligne entière K_1, de manière à retomber finalement sur sa valeur initiale, $f(z)$ prend des valeurs dont le module est $= C$, et pour $f(z) = C(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ l'argument φ de $f(z)$ croît de $2 n_1 \pi$, puisqu'à l'intérieur de K_1 il y a n_1 racines de $f(z) = 0$. Il en résulte, évidemment, que l'expression $f(z)$ prend alors *toutes* les valeurs ayant

C pour module, et qu'elle prend chacune de ces valeurs *au moins* n_1 fois.

Pareillement, si z parcourt la ligne K_2, l'expression $f(z)$ prend toutes les valeurs ayant C pour module, et elle prend chacune de ces valeurs *au moins* n_2 fois, etc.

Si l'on fait donc parcourir à z successivement toutes les lignes $K_1, K_2, \ldots K_s$, et que

$$t = C(\cos u + i \sin u)$$

soit un nombre quelconque avec C pour module, $f(z)$ prendra au moins $n_1 + n_2 \ldots + n_s$ fois, c'est-à-dire au moins n fois, la valeur $f(z) = t$. Mais comme l'équation $f(z) = t$ n'a pas *plus* de n racines, il est clair qu'il n'y a pas plus de n_1, mais *justement* n_1 racines de l'équation $f(z) = t$ situées sur la ligne K_1; de même, sur les lignes K_2, $K_3 \ldots$, se trouvent respectivement n_2, $n_3 \ldots$ racines de cette équation.

On voit en outre, immédiatement, que lorsque le module de t' est plus petit que C, il y a à l'intérieur de $K_1, K_2 \ldots$ respectivement n_1, $n_2 \ldots$ points où $f(z)$ prend la valeur t'.

Le cas particulier où la ligne K_1 ne renferme qu'un seul point radical, mérite d'être remarqué. Si on a alors *mod.* $t' \leqq C$, il n'y a à l'intérieur de K_1 qu'un seul point où $f(z)$ prenne la valeur t', et lorsque t_1, t_2 sont deux points, non coïncidents, situés à l'intérieur de K_1, $f(t_1)$ n'est jamais égale à $f(t_2)$.

LEIDEN, octobre 1882.

Tableau I.

α	Z_1		Z_2		Z_3		Z_4	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
0°	+1.2173	0.0000	—1.7484	0.0000	—0.2345	+1.3507	—0.2345	—1.3507
10	1.2157	+0.0299	1.7468	—0.0286	0.2665	1.3483	0.2024	1.3497
20	1.2107	0.0596	1.7419	0.0569	0.2984	1.3424	0.1704	1.3451
30	1.2025	0.0889	1.7338	0.0848	0.3298	1.3330	0.1388	1.3371
40	1.1908	0.1176	1.7223	0.1121	0.3606	1.3201	0.1078	1.3256
50	1.1757	0.1456	1.7075	0.1386	0.3907	1.3034	0.0774	1.3104
60	1.1571	0.1724	1.6893	0.1639	0.4197	1.2830	0.0481	1.2916
70	1.1347	0.1980	1.6675	0.1878	0.4474	1.2587	—0.0198	1.2689
80	1.1086	0.2221	1.6420	0.2101	0.4736	1.2301	+0.0070	1.2421
90	1.0783	0.2443	1.6125	0.2304	0.4979	1.1970	0.0321	1.2110
100	1.0436	0.2643	1.5789	0.2482	0.5200	1.1590	0.0553	1.1751
110	1.0040	0.2816	1.5405	0.2629	0.5394	1.1153	0.0760	1.1339
120	0.9587	0.2956	1.4969	0.2740	0.5556	1.0650	0.0938	1.0866
130	0.9065	0.3056	1.4471	0.2804	0.5676	1.0066	0.1082	1.0318
140	0.8457	0.3103	1.3896	0.2806	0.5740	0.9375	0.1180	0.9673
150	0.7727	0.3078	1.3219	0.2717	0.5726	0.8532	0.1218	0.8893
160	0.6804	0.2939	1.2389	0.2479	0.5582	0.7433	0.1168	0.7893
170	+0.5481	+0.2577	1.1295	—0.1922	—0.5142	+0.5773	+0.0957	—0.6428
180	0.0000	0.0000	—1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tableau I*a*.

	Z_1		Z_2		Z_3		Z_4	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
	+0.5427	+0.2559	—1.0733	—0.1474	—0.4407	+0.4071	+0.0864	—0.5938
	0.4485	0.2210	1.0275	0.0913	0.3856	0.3183	0.0662	0.4956
	0.3563	0.1818	—1.0038	—0.0342	0.3208	0.2389	0.0459	0.3974
	0.2655	0.1396			0.2476	0.1694	0.0275	0.2987
	0.1759	0.0952			0.1687	0.1074	0.0128	0.1996
	+0.0873	+0.0487			—0.0856	+0.0516	+0.0033	—0.0999

Tableau II.

α	Z_1		Z_2		Z_3		Z_4	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
0°	+1.2263	0.0000	—1.7570	0.0000	—0.2347	+1.3603	—0.2347	—1.3603
10	1.2246	+0.0309	1.7553	—0.0295	0.2678	1.3579	0.2015	1.3592
20	1.2196	0.0616	1.7503	0.0588	0.3006	1.3519	0.1686	1.3546
30	1.2111	0.0919	1.7421	0.0878	0.3331	1.3424	0.1359	1.3465
40	1.1993	0.1216	1.7304	0.1160	0.3650	1.3292	0.1038	1.3348
50	1.1839	0.1506	1.7153	0.1435	0.3962	1.3123	0.0724	1.3194
60	1.1649	0.1785	1.6967	0.1698	0.4263	1.2916	0.0419	1.3002
70	1.1422	0.2052	1.6745	0.1949	0.4552	1.2668	—0.0125	1.2771
80	1.1156	0 2305	1.6485	0.2183	0.4827	1.2378	+0.0156	1.2499
90	1.0847	0.2539	1.6183	0.2397	0.5084	1.2041	0.0420	1.2183
100	1.0494	0.2753	1.5839	0.2589	0.5321	1.1653	0.0667	1.1818
110	1.0089	0.2942	1.5446	0.2751	0.5534	1.1208	0.0891	1.1399
120	0.9625	0.3101	1.4998	0.2879	0.5716	1.0695	0.1089	1.0917
130	0.9091	0.3224	1.4485	0.2964	0.5864	1.0099	0.1258	1.0358
140	0.8466	0.3301	1.3890	0.2992	0.5966	0.9391	0.1390	0.9700
150	0.7714	0.3320	1.3182	0.2941	0.6010	0.8523	0.1478	0.8902
160	0.6756	0.3260	1.2299	0.2766	0.5972	0.7384	0.1515	0.7878
170	0.5367	0.3097	1.1068	—0.2343	0.5826	+0.5632	0.1527	0.6385
180	+0.2500	+0.3536	—0 7500	0.0000	—0.7500	0.0000	+0.2500	—0.3536

Tableau IIa.

Z_1		Z_2		Z_3		Z_4	
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
+0.4315	+0.3021	—0.9832	—0.1734	—0.5896	+0.6434	+0.1585	—0.5527
0.3650	0.3063	0.8938	0.1177	0.5775	0.4846	0.1734	0.4765
0.3174	0.3174	—0.8326	—0.0728	0.5766	0.4038	0.1959	0.4202
+0.2799	+0.3335			0.5815	0.3357	+0.2209	—0.3825
				0.5917	0.2759		
				0.6071	0.2209		
				0.6283	0.1684		
				0.6569	0.1158		
				—0.6956	+0.0609		

SUR LES

PÉRIODES DE L'AURORE BORÉALE;

REMARQUES SUR L'ÉTUDE FAITE SOUS CE TITRE PAR
M. LE DR. SOPHUS TROMHOLT,
DANS L'ANNUAIRE 1880 DE L'INSTITUT MÉTÉOROLOGIQUE DANOIS

PAR

H. J. H. GRONEMAN.

L'auteur de l'Étude ci-dessus citée avait eu l'obligeance de m'en envoyer un exemplaire, obligeance à laquelle je fus d'autant plus sensible que ses idées sur les propriétés et le caractère du phénomène des aurores polaires, en ce qui concerne son siège dans l'atmosphère et son origine, n'étaient pas d'accord avec les miennes. Tout en respectant et en appréciant les efforts de M. Tromholt, qui ont pour but de rassembler des données nouvelles en cette matière, j'avais cru nécessaire de critiquer le résultat énoncé, „que l'aurore boréale serait très souvent „un phénomène local et situé à une petite hauteur au-dessus „de la surface terrestre". On trouve ma réfutation de cette thèse, réfutation basée sur les données mêmes de M. Tromholt, dans la „*Zeitschrift der oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie*, 1882, p. 187. [1])

Le Mémoire de M. Tromholt „*Sur les périodes de l'aurore boréale*" contient sans aucun doute des données nouvelles et précieuses, savoir, des observations faites à Godthaab, dans le

---

[1]) Après avoir écrit la présente Note, j'ai rencontré, dans le même Journal, une anticritique, à laquelle il sera répondu dans un article que j'espère voir imprimé bientôt.

Groenland méridional, à 64°11′ de L. B., par M. S. Kleinschmidt, pendant les années 1865 (Sept.) jusqu'à 1889 (Mai). L'auteur, après un examen détaillé de ces observations, que nous ne pouvons suivre ici dans tous ses détails, en tire la conséquence, que *„tout ce qui se rapporte à la fréquence variable des aurores „boréales à Godthaab prouve que les choses se passent là dans „des conditions tout à fait opposées à ce qui a lieu par des „latitudes inférieures"*.

En considérant de plus près la base sur laquelle M. Tromholt appuie cette thèse, nous trouvons dans le tableau X (p. 11), que l'auteur compare les nombres réduits des aurores boréales de M. Kleinschmidt avec les nombres relatifs de M. Wolf, de Zürich, pour les taches solaires, *et qu'il admet tacitement que ces derniers nombres sont toujours et partout d'accord avec ceux des aurores boréales dans les latitudes moyennes.*

Quant à nous, nous ne pouvons admettre ce dernier point. Quoiqu'il soit prouvé que le phénomène des taches solaires est *en général* d'accord avec celui des aurores, on pourrait citer des cas où cet accord *laisse beaucoup à désirer pour les nombres d'aurores d'un certain lieu d'observation*, *pendant une courte durée.* Ainsi, pour la période actuelle, où les taches solaires sont en pleine activité, les aurores polaires, à nos latitudes, font presque entièrement défaut depuis la grande aurore du 31 Janv. 1881, qui semblait en ouvrir une nouvelle série [1]).

C'est pour cette raison que nous avons fait deux comparaisons du même genre que les tableaux de M. Tromholt, afin de contrôler son résultat directement, pour *les aurores* des contrées de haute latitude, par celles des latitudes moyennes. En rejetant pour cette comparaison la série trop courte de Godthaab, pour laquelle nous admettons volontiers le caractère que M. Tromholt lui attribue, mais qui n'embrasse que *une* période et

[1]) Ces mots ont été écrits avant la magnifique aurore du 2 Octobre 1882. Ils expriment néanmoins un trait intéressant de la période actuelle, qui est aussi indiqué par un infatigable observateur en ce genre, M. Weber de Peckeloh, dans la „*Wochenschrift*" de M. le Dr. Klein de Cologne.

un tiers, nous avons fait usage de la série de Stykkisholm en Islande, que M. Tromholt donne, p. XVI de son Mémoire, et qui contient des observations de 1846—'73, c. a. d. pendant un intervalle de 27 années, ou durant deux périodes et demie; quant aux nombres d'aurores boréales pour les latitudes moyennes de l'Europe, nous les avons extraits du Mémoire de M. le prof. Fritz de Zürich, *Die Beziehungen der Sonnenflecken*, publié par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem, p. 30 („*Jahressummen*").

Notre première comparaison met en parallèle les nombres d'aurores (c) observées à Stykkisholm avec ceux (n) observés en Europe, au sud du cercle polaire. Comme M. Tromholt forme toujours ses années de la dernière moitié d'une année et de la première moitié de l'année suivante, nous avons pris les moyennes de deux nombres consécutifs de M. Fritz.

La seconde comparaison se rapporte aux mêmes nombres d'aurores à Stikkisholm et aux nombres relatifs des taches solaires d'après M. Wolf.

Voici notre premier tableau: (voir p. 25).

Tandis que dans la formule donnée par M. Tromholt (p. XI de son Mémoire),

$$c' = 91.7 - 0.372\ \mathrm{W},$$

où c' désigne les nombres réduits d'aurores boréales à Godthaab et W les nombres relatifs des taches solaires, le coefficient de W est *négatif*, nous trouvons, au contraire, un coefficient *positif* de n, ce qui indique que les deux nombres c et n suivent la même marche.

Nous ne nous sommes pas contenté de ce résultat. En calculant les poids de k et h, nous avons trouvé:

le poids de $k =$ 4.55;
„ „ „ $h =$ . . . 230623;

l'erreur probable de $k = 41.89$
„ „ „ $h = 0.019$.

Années.	Nombres d'aurores (c, p. XVI du Mémoire de M. T.) à Stykkisholm.	Nombres annuels n (moyennes de deux demi-années) pour l'Europe moyenne.	Produits $n \times c$.	Carrés n^2.
1846—'47	15	183	2745	33489
'47—'48	19	243	4617	59049
'48—'49	29	230	6670	52900
'49—'50	40	210	8400	44100
'50—'51	36	214	7704	45796
'51—'52	24	247	5928	61009
'52—'53	79	253	19987	64009
'53—'54	42	172	7224	29584
'54—'55	59	98	5782	9604
'55- '56	41	65	2665	4225
'56—'57	37	38	1406	1444
'57—'58	32	56	1792	3136
'58—'59	39	135	5265	18225
'59—'60	42	150	6300	22500
'60—'61	29	119	3451	14161
'61—'62	33	129	4257	16641
'62—'63	36	145	5220	21025
'63—'64	33	161	5313	25921
'64—'65	48	183	8784	33489
'65—'66	48	204	9792	41616
'66—'67	49	203	9947	41209
'67—'68	33	201	6633	40401
'68—'69	59	245	14455	60025
'69—'70	34	318	10812	10124
'70—'71	45	353	15885	124609
'71—'72	47	480	22560	230400
'72—'73	39	511	19929	261121
	1067	5546	223523	1369812

Supposons qu'entre ces deux variables c et n existe l'équation:

$$c = k + h\,n \qquad (1)$$

Cette équation devient:

$$c = 35{,}6 + 0{,}019\,n \qquad (2)$$

Le coefficient de *n* dans l'équation (2) est donc positif, et, quoique l'erreur probable soit aussi grande que le nombre *n*, il n'y a pas lieu d'attribuer aux deux phénomènes confrontés une marche opposée. *Il faut plutôt conclure que les nombres des aurores observés en Islande et en Europe, au sud du cercle polaire, suivent une marche semblable.*

Une figure, que nous avons tracée, indique la même loi que notre calcul. A la vue de cette figure, trop facile à construire pour que nous la reproduisions ici, personne ne contestera que, d'après elle aussi, les deux phénomènes montrent plus de concordance que de discordance.

Evidemment, M. Tromholt *se trompe en admettant que les aurores observées à Stykkisholm „suivent la même loi que celles de Godthaab"* (p. XVI), c'est-à-dire, qu'elles prouveraient que „tout ce qui se rapporte à la fréquence variable des aurores „boréales ... se passe là dans des conditions tout à fait oppo- „sées à ce qui a lieu par les latitudes inférieures". Quoique cette thèse soit mise hors de doute par le calcul de M. Tromholt, en ce qui concerne les aurores observées à Godthaab (1865—'79), dans la supposition que les nombres W soient d'accord avec les nombres *n* d'aurores boréales pour l'Europe moyenne, il n'en est pas ainsi à l'égard des aurores qui se sont montrées à Stykkisholm, comparées à celles de l'Europe moyenne.

Après avoir constaté le degré de parallélisme entre les nombres d'aurores pendant 27 années à Stykkisholm et ceux de l'Europe au sud du cercle polaire — degré faible, mais, ce nous semble, incontestable, — il nous a paru important de calculer la formule de dépendance pour les nombres des aurores de Stykkisholm et ceux des taches solaires. L'équation analogue à l'équation (2) devient alors:

$$c = 46.08 - (0.107 \pm 0.044)\ \mathrm{W}.$$

Ainsi il n'y a pas eu, pendant ce temps, de parallélisme entre ces deux phénomènes. Au contraire, la formule en démontre la marche opposée.

On voit qu'il n'est pas permis d'admettre que les nombres relatifs des taches solaires donneront toujours le même résultat que ceux des aurores polaires, en cas de comparaison avec un troisième phénomène.

Il pourrait sembler superflu de chercher si les nombres d'aurores pour l'Europe moyenne suivent une loi parallèle ou contradictoire à celle des nombres relatifs des taches solaires. Néanmoins, nous avons construit une figure qui se rapporte aux taches solaires. Elle montre, à côté d'un parallélisme assez sensible, des discordances, surtout entre 1850 et '53, ainsi qu'entre 1860 et '68. Quoique les traits de concordance et de discordance ne soient pas assez manifestes pour éloigner tout doute, nous croyons que cette figure dévoile un caractère de parallélisme plutôt qu'un caractère opposé entre ces deux phénomènes. Ainsi nous trouvons les nombres:

c et n parallèles,
c et W opposés,
n et W parallèles.

Ce résultat serait absurde, si le parallélisme ou l'opposition étaient parfaits. Mais, quand cela n'a pas lieu, il est très concevable. En effet, soient a, b et c trois phénomènes périodiques. Supposons que:

a dépende de deux causes p et q;
b " " " " q et r;
c " " " " r et s;

alors a montrera des traits de concordance avec b, et b avec c, tandis que a et c resteront en général tout à fait indépendants et pourront très bien être opposés.

En somme, quel que soit l'intérêt du nouveau travail de M. Tromholt, il n'a pas du tout prouvé que les aurores boréales des hautes latitudes aient un mouvement périodique opposé à celui des latitudes moyennes.

D'ailleurs, notre étude fait voir que deux phénomènes, variant en général parallèlement, peuvent avoir, dans des intervalles

de courte durée et pour un certain lieu d'observation, un caractère opposé.

Nous croyons avoir fait, dans ce qui précède, une critique impartiale et purement analytique d'un des „résultats" de M. Tromholt. Qu'il nous soit permis de la faire suivre d'une remarque concernant la théorie sur l'origine de l'aurore polaire, que nous avons développée dans les *Mémoires de la Société des Spectroscopistes Italiens* (1878, Vol. VII). Nous sommes en quelque sorte obligé d'ajouter cette remarque à la présente Note, en réponse au jugement que M. Tromholt croit pouvoir porter, p. LVI de son Mémoire, sur ladite théorie. Évidemment, notre théorie n'est pas encore „renversée à tout jamais" par des conséquences que nous avons prouvé ci-dessus n'être pas admissibles en général. D'ailleurs, cette théorie ne suppose pas que, dans les cas d'aurore „la terre entière pénètre toujours dans un milieu matériel contenant de la poussière de fer cosmique". Elle laisse plutôt frapper la terre par des *courants*, des *essaims linéaires*, qui peuvent avoir en largeur des dimensions assez petites pour ne donner lieu qu'à des aurores plus ou moins locales. Nous avons tâché d'expliquer dans notre deuxième Mémoire, inséré dans les *Astronomische Nachrichten* (Bd. LXXXVI, N°. 2063), pourquoi les courants qui frappaient jadis la zone torride se sont épuisés les premiers, suivis plus tard par ceux qui rencontraient les zones tempérées, et nous ne voyons pas pourquoi il serait absolument impossible qu'une oscillation légère du plan de ces courants s'accorde avec un déplacement lent de la zone de fréquence maximum des aurores de la Terre, déplacement que Weyprecht croyait pouvoir admettre. M. Tromholt n'a pas le droit de dire, en passant, que la base de notre théorie n'est pas très solide, avant de l'avoir soumise à une critique sérieuse. S'il veut prendre cette peine, et qu'il réussisse à nous convaincre, il peut être assuré de trouver en nous assez d'amour de cette vérité, que nous cherchons tous, pour avouer notre erreur.

GRONINGUE, le 24 Sept. 1882.

COULEUR ET ASSIMILATION [1],

PAR

TH. W. ENGELMANN.

I. L'assimilation n'a lieu que dans les particules plasmatiques contenant une matière colorante.

Depuis que Ingenhousz, en 1779, a énoncé la loi, fondée sur ses célèbres expériences, que les parties vertes des plantes sont seules aptes à déphlogistiquer l'air fixe, c'est-à-dire, à dégager de l'oxygène dans une atmosphère contenant de l'acide carbonique, l'existence d'un rapport causal absolu entre l'assimilation et la chlorophylle a été admise presque sans conteste. Quelques objections isolées ont été réfutées. Le fait que beaucoup de feuilles non vertes assimilent également, a trouvé une explication très simple dans le résultat de l'observation microscopique, laquelle a montré qu'il existe ici, dans le tissu foliaire assimilateur, de la vraie chlorophylle, mais cachée à l'œil nu par une autre matière colorante. Là où, comme chez les Diatomacées, les Floridées, les Oscillarinées, etc., le protoplasma assimilateur, même au microscope, ne paraît contenir qu'une seule matière colorante, non verte, on a réussi, par des moyens chimiques, à extraire de cette masse colorée une matière colo-

---

[1]) Développement d'une conférence faite, le 27 juin 1882, à la section des sciences physiques du *Provinciaal Utrechtsch Genootschap*, ainsi que d'un article publié, sous le titre ci-dessus, dans les *Onderzoekingen* du laboratoire physiologique d'Utrecht (t. VII, 1882, p. 209 et suiv.).

rante verte, présentant la plus grande analogie avec la chlorophylle. Dans ces cas, croyait-on, la chlorophylle assimilatrice était masquée par le mélange intime d'un ou de plusieurs principes colorants, inactifs au point de vue de l'assimilation.

Comme d'ailleurs aucun dégagement d'oxygène n'avait jamais pu être constaté chez des plantes ou des parties de plantes dépourvues de matière colorante, on était certainement autorisé à admettre un rapport causal absolu entre l'assimilation et la présence d'une matière colorante, spécialement de la chlorophylle.

Ce n'est que dans les derniers temps que de nouvelles objections ont été élevées contre cette manière de voir. M. Pringsheim, on le sait, pense que la chlorophylle agit seulement comme un écran sur la lumière. En absorbant les rayons qui, sans cela, provoqueraient (d'après M. Pringsheim) une oxydation énergique dans le protoplasma, elle entraverait cette oxydation et donnerait ainsi la prépondérance au dégagement d'oxygène, qui pourrait avoir lieu même en l'absence de la matière colorante chlorophyllienne.

Dans son premier grand Mémoire [1]), M. Pringsheim ne se prononce pas encore très clairement sur le point de savoir si le protoplasma incolore extérieur aux grains de chlorophylle doit aussi être regardé comme le siège d'une réduction d'acide carbonique. Ses paroles peuvent être interprétées dans ce sens, et elles l'ont été effectivement par beaucoup de lecteurs. Moi aussi je leur avais donné cette signification et bientôt, après, je crus trouver dans les résultats obtenus par la méthode des bactéries une réfutation de l'hypothèse de M. Pringsheim [2]). Jamais cette méthode, d'une incroyable sensibilité et permettant les localisations microscopiques les plus rigoureuses, ne m'avait laissé découvrir le moindre dégagement d'oxygène en

---

[1]) *Ueber Lichtwirkung und Chlorophyllfunction in d. Pflanze* (*Jahrbücher f. wiss. Botanik*, *herausg. v.* N. Pringsheim, t. XXI, 1881, p. 288).

[2]) *Neue Methode zur Untersuchung der Sauerstoffausscheidung pflanzlicher und thierischer Organismen* (*Bot. Ztg.* 1881, n° 28. — *Onderzoek.* etc., VI, 1881, p. 315. — Pflüger's *Archiv*, XXV, p. 258).

des points où le plasma cellulaire ne contenait pas de chlorophylle.

Or, dans un Mémoire publié récemment [1]), M. Pringsheim conteste la force probante de ces faits et déclare expressément que la question de savoir si l'assimilation ne s'opère qu'au sein des corpuscules chlorophylliens est jusqu'ici entièrement indécise. D'après lui, l'assimilation dans le protoplasma dépourvu de matière colorante ne serait pas exclue. Réellement, au point de vue de la théorie de l'écran, soutenue par M. Pringsheim, on ne voit pas pourquoi le protoplasma pur de tout principe colorant ne pourrait pas, lui aussi, décomposer l'acide carbonique. Le stroma incolore des grains de chlorophylle ne paraît, en effet, ni sous le rapport chimique ni sous le rapport physique, avoir des qualités essentiellement différentes de celles du protoplasma. Si improbable que puisse être, en présence des faits universellement connus, une semblable opinion, il faut pourtant reconnaître que jusqu'ici on n'a pas fourni la preuve expérimentale directe que, dans les cellules vertes, les grains de chlorophylle soient le siège exclusif de l'assimilation. On pourrait supposer, par exemple, que ces grains, peut-être en formant quelque substance qui se mêle au reste du protoplasma, rendent celui-ci indirectement apte à la fonction assimilatoire. Nous savons que le pigment, qui se rencontre dans l'organe visuel des animaux même les plus inférieurs, aussi constamment que la chlorophylle dans les organes assimilateurs des plantes, n'est pas non plus la substance directement sensible à la lumière, mais seulement un élément de coopération indirecte; c'est plutôt dans une substance incolore que se trouve le siège de la sensation lumineuse spécifique, comme j'ai pu le démontrer directement pour *l'Euglena* [2]), et comme il n'est guère douteux pour la substance des membres extérieurs des cônes et bâtonnets

[1]) *Ueber Chlorophyllfunction und Lichtwirkung in der Pflanze. Offenes Schreiben* etc., Berlin, 1882, p. 101.

[2]) *Sur la perception de la lumiere* etc., dans: *Arch. Néerl.*, t. XVII, 1882, p. 417.

de la rétine des animaux supérieurs. Une méthode fournissant cette démonstration directe a donc des titres à une considération particulière. Telle est, je crois l'avoir prouvé, la méthode des bactéries.

Sa valeur repose, d'une part, sur l'excessive sensibilité du réactif employé pour l'oxygène libre, d'autre part, sur la possibilité de fixer les points où l'oxygène se dégage dans les cellules végétales avec toute l'exactitude que comportent les distinctions microscopiques.

La sensibilité est si grande, qu'on peut reconnaître, comme j'en ai déjà fait la remarque antérieurement, des quantités d'oxygène approchant des limites, et peut-être même les dépassant, que la physique théorique permet de calculer pour le poids d'une seule molécule d'oxygène. Ainsi que nous le verrons plus tard en détail, on peut arriver par différentes voies, indépendantes l'une de l'autre, à évaluer la plus petite quantité d'oxygène qui se laisse découvrir au moyen des bactéries. On trouve ainsi, comme résultat concordant, qu'à l'aide de bactéries très sensibles (certains *Micrococcus*, petites Spirilles) il est possible de déceler environ la trillionième partie d'un milligramme d'oxygène[1]). Clerk Maxwell [2]) a obtenu par le calcul, pour la valeur la plus probable du poids d'une molécule d'oxygène, environ un treize-trillionième de milligramme; les recherches de M. van der Waals [3]) donnent pour limite supérieure de cette même valeur environ un trente-trillionième de milligramme, et les calculs d'autres physiciens (Stoney, W. Thomson, etc.), exécutés en partie d'une manière toute différente, conduisent à des valeurs du même ordre, ou à peu près du même ordre. La méthode des bacté-

---

[1]) Mes premières expériences, dont j'avais déduit des valeurs plus élevées, avaient porté sur des bactéries relativement très peu sensibles; celles-ci restent d'ailleurs, pour une foule de recherches, les plus convenables.

[2]) Clerk Maxwell, *A Discourse on Molecules* (*Philos. Magaz.* [4], XLVI, 1873, p. 453).

[3]) J. D. van der Waals, *Over de continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand*, Leiden, 1873, p. 100.

ries, on le voit, s'en approche de très près, de si près qu'on est autorisé à dire: si du protoplasma incolore il se dégageait, ne fût-ce que de temps en temps, quelques particules d'oxygène, — et c'est ce qui aurait nécessairement lieu en cas d'assimilation par le protoplasma, — on devrait, au voisinage immédiat, pouvoir constater ce dégagement au moyen de bactéries très sensibles. Or, toutes les recherches ont donné un résultat négatif. J'ai expérimenté, entre autres, sur les cellules du parenchyme de feuilles albinotiques d'Erable et de Lierre, sur les cellules de beaucoup de pétales, sur les poils staminaux du *Tradescantia*, sur les poils radicaux de l'*Hydrocharis*, sur les filaments du mycélium de différents Champignons, sur les plasmodies du *Didymium serpula*, sur les parties incolores du protoplasma de beaucoup d'espèces de *Spirogyra*, de *Mesocarpus*, *Zygnema*, *Callithamnion*, ainsi que sur des Amibes, sur beaucoup d'Infusoires et généralement sur des cellules animales de différentes espèces. Il va sans dire que la sensibilité des bactéries employées était chaque fois contrôlée au moyen d'objets de comparaison verts, introduits dans la même préparation. On faisait varier de toute manière l'intensité et la couleur de la lumière appliquée à l'éclairage. Sous ce rapport, l'objectif microspectral, décrit antérieurement, rendit de très bons services. On essaya aussi l'écran de M. Pringsheim: une feuille vivante, verte, ou une couche plus ou moins épaisse d'une solution de chlorophylle, intercalée entre la source lumineuse (soleil, forte flamme de gaz) et la préparation. Jamais on n'observa le moindre indice d'un dégagement d'oxygène dans le protoplasma incolore.

Rien de plus facile, au contraire, que de constater que chaque grain vivant de chlorophylle, même le plus petit, dégage de l'oxygène. Particulièrement frappantes et instructives sont les expériences dans lesquelles des parties colorées et incolores du protoplasma vivant de la même cellule sont éclairées, isolément, sur une étendue très restreinte, soit l'une après l'autre, soit simultanément. J'ai utilisé à cet effet le dispositif décrit anté-

rieurement [1]), qui permet de projeter deux cercles lumineux aussi petits qu'on le désire, et à telle distance mutuelle qu'on le désire, sur une goutte partout ailleurs complètement obscure. Les objets soumis à ces expériences furent des cellules de *Spirogyra* (les meilleures sont celles dont les bandes de chlorophylle s'élèvent sous un angle d'environ 45°), de *Mesocarpus*, *Zygnema cruciatum*, *Callithamnion*, etc. Tandis qu'aux places colorées et éclairées on voit bientôt s'agiter vivement comme une fourmilière de bactéries, aux endroits non colorés tout reste, à la lumière, aussi désert et aussi immobile que dans l'obscurité. Ici encore, il ne sert de rien de faire passer préalablement la lumière par une dissolution de chlorophylle ou par une feuille verte.

La méthode des bactéries fournit donc la démonstration empirique directe que ce sont seulement les cellules contenant de la matière colorante, et dans celles-ci exclusivement les *particules plasmatiques contenant de la matière colorante*, qui dégagent de l'oxygène à la lumière.

II. Relation plus spéciale entre l'absorption de la lumière et l'assimilation.

Mes recherches antérieures [2]) sur l'énergie assimilatoire relative des différents rayons du spectre solaire avaient montré que, pour les cellules vertes, les longueurs d'onde les plus efficaces se trouvent dans le rouge, entre les raies *B* et *C*, et dans le bleu, près de *F*. Ce sont précisément là, circonstance frappante, les longueurs d'onde que la chlorophylle absorbe en plus forte proportion, et on devait naturellement se demander si, pour les cellules à plasma de coloration différente, le même rapport

[1]) *Zur Biologie der Schizomyceten* (*Bot. Ztg.* 1882, N°. 20. — *Onderzoek.* etc., VII, Afl. 1, p. 111, Anm. — Pfluger's *Archiv*, t. XXVI, p. 537).
[2]) *Bot. Ztg.*, 1882, Nos 26 et 29.

existerait entre l'absorption et l'assimilation. Quelques mesures, faites sur des Diatomées brunes et des Oscillarinées bleues, me donnèrent des résultats affirmatifs. Mais, comme le nombre des expériences ne paraissait pas encore assez grand et que je désirais étudier aussi des cellules d'autre couleur, notamment des cellules rouges (Floridées), je m'abstins d'entrer dans des détails sur cette question fondamentale et me bornai à quelques indications concernant la relation présumée entre les phénomènes [1]). Depuis lors, j'ai suffisamment complété et multiplié les expériences pour pouvoir donner, à ce qu'il me semble, des conclusions positives.

Il s'agissait de déterminer exactement, chez des cellules aussi nombreuses et aussi diversement colorées que possible, la marche de l'énergie assimilatoire en fonction de la longueur d'onde, et de comparer cette marche avec l'allure de l'absorption lumineuse dans le spectre des mêmes cellules. La détermination de la marche de l'énergie assimilatoire a été faite de la manière antérieurement décrite [2]), à l'aide de l'objectif microspectral, d'après la méthode de l'observation successive. L'allure de l'absorption lumineuse pouvait être déduite, au moins en partie et avec une exactitude approchée, des résultats connus de l'analyse spectrale des matières colorantes en question. J'ai en outre examiné chaque fois, au moyen de l'oculaire microspectral de Zeiss, l'absorption des cellules vivantes; car, ce qu'il importe de connaître, ce sont les propriétés optiques de la matière colorante encore contenue dans le plasma vivant, encore apte à fonctionner, et ces propriétés ne sont pas toujours identiques à celles des substances colorantes mortes qui ont fourni la plupart des spectres dont la description a été publiée.

Mes mesures se rapportent à quatre sortes de cellules: cel-

[1]) Voir l'article *Ueber Assimilation von Haematococcus*, dans *Bot. Ztg.*, 1882, N°. 39.

[2]) *Ueber Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospectrum* (*Bot. Ztg.*, 1882, N°. 26. — *Onderzoek.*, VII, p. 190. — Pfluger's *Archiv*, XXV, p. 258).

lules vertes, brun-jaunâtre (Diatomées), vert-bleuâtre (Oscillarinées) et rouges (Floridées). — Pour la plupart des espèces, j'ai déterminé la forme de la courbe d'assimilation dans le spectre solaire et dans le spectre d'une flamme de gaz constante; pour les Floridées, je n'ai encore pu le faire que dans ce dernier, à cause de la défaveur persistante du ciel hollandais.

Le tableau suivant renferme les résultats. Les nombres non mis entre parenthèses sont les moyennes des valeurs relatives de l'énergie assimilatoire dans les régions du spectre que désignent les raies de Fraunhofer indiquées en tête des mêmes colonnes. Les chiffres placés entre parenthèses font connaître le nombre des mesures d'où les moyennes ont été déduites. Comme le spectre prismatique donne, par suite de l'inégalité de la dispersion, une représentation inexacte de l'action relative des différents rayons lumineux, j'ai aussi inscrit partout les valeurs de l'énergie assimilatoire obtenues par réduction au spectre normal, ces valeurs étant toujours exprimées en centièmes de la valeur maximum de la même série horizontale.

(Voir le Tableau, p. 37).

Une inspection de ce tableau, ou, mieux encore, une représentation graphique de son contenu, montre que la marche de la fonction qui exprime la dépendance entre l'énergie de l'assimilation et la longueur d'onde est différente pour les quatre catégories de cellules, et, pour chacune d'elles, différente suivant qu'il s'agit de la lumière du soleil ou de la lumière du gaz.

En ce qui concerne d'abord ce dernier point, on remarque que, chez toutes les espèces de cellules, l'action des rayons plus réfrangibles est, relativement à celle des rayons moins réfrangibles, beaucoup plus forte dans les expériences à la lumière solaire que dans celles à la lumière du gaz. La méthode des bactéries confirme donc ce fait connu, que l'énergie de la lumière du gaz, comparée à celle de la lumière solaire, décroît rapidement du côté plus réfrangible du spectre. Si l'on calcule le rapport de l'action assimilatoire A de la lumière du gaz,

I. Cellules vertes (*Sphagnum*, *Cladophora*, *Bulbochaete*, *Oedogonium*, *Mesocarpus*, *Spirogyra*, *Zygnema*, *Vaucheria*, *Ankistrodesmus*, *Scenodesmus*, *Colacium*, *Euglena*, etc.).

		a	*B* ½ *C*	*C* ½ *D*	*D*	*D* ½ *E*	*E* ½ *b*	*E* ½ *F*	*F*	*F* ½ *G*	*G*	*H*
Lumière solaire.	Sp. prism.	9,5 (16)	100 (61)	60,5 (6)	34,0 (56)	20,4 (10)	13,9 (44)	23,0 (14)	24,6 (38)	17,2 (7)	8,3 (7)	—
	Sp. normal	6,38	**100**	81,2	55,1	41,2	36,3	69,9	86,1	80,9	47,2	—
Lumière du gaz.	Sp. prism.	23,2 (32)	100 (208)	40,6 (34)	22,4 (111)	11,8 (38)	5,6 (105)	5,3 (12)	4,8 (50)	4,0 (2)	0,8 (5)	0,35 (5)
	Sp. normal	15,6	**100**	54,6	36,3	23,8	14,7	16,0	16,9	18,8	4,5	2,6

II. Cellules brun-jaunâtre (*Melosira*, *Navicula*, *Pinnularia*).

		a	*B* ½ *C*	*C* ½ *D*	*D*	*D* ½ *E*	*E* ½ *b*	*E* ½ *F*	*F*	*F* ½ *G*	*G*	*H*
Lumière solaire.	Sp. prism.	20,9 (7)	100 (117)	60,6 (27)	50,3 (57)	52,3 (50)	36,1 (31)	27,3 (3)	22,0 (37)	12,1 (10)	6,8 (10)	—
	Sp. normal	13,3	94,6	77,0	77,1	**100**	89,3	79,3	75,9	53,8	36,6	—
Lumière du gaz.	Sp. prism.	23,5 (34)	100 (244)	40,9 (89)	33,7 (151)	24,4 (91)	14,5 (80)	10,9 (6)	6,7 (85)	2,2 (5)	1,2 (6)	—
	Sp. normal	15,8	**100**	54,9	54,5	43,7	37,9	33,1	23,5	10,4	6,8	—

III. Cellules vert-bleuâtre (*Oscillaria*, *Nostoc*).

		a	*B* ½ *C*	*C* ½ *D*	*D*	*D* ½ *E*	*E* ½ *b*	*E* ½ *F*	*F*	*F* ½ *G*	*G*	*H*
Lumière solaire.	Sp. prism.	—	100 (29)	84,4 (5)	72,3 (32)	—	19,9 (24)	—	7,1 (10)	—	—	—
	Sp. normal	—	85,3	96,7	**100**	—	44,4	—	21,2	—	—	—
Lumière du gaz.	Sp. prism.	30,5 (17)	100 (113)	76,0 (32)	42,9 (99)	18,2 (21)	7,6 (49)	—	3,7 (16)	—	—	—
	Sp. normal	20,1	98,0	**100**	79,2	31,9	19,2	—	12,7	—	—	—

IV. Cellules rouges (*Callithamnion*, *Ceramium*).

		a	*B* ½ *C*	*C* ½ *D*	*D*	*D* ¼ *E*	*D* ½ *E*	*E* ½ *b*	*E* ½ *F*	*F*	*G*
Lumière du gaz.	Sp. prism....	14,3 (10)	70,0 (93)	53,5 (36)	63,9 (50)	100 (61)	70,6 (23)	28,7 (35)	11,3 (4)	10,1 (36)	1,4 (6)
	Sp. normal...	5,4	26,3	40,0	57,8	**100**	70,6	41,9	19,2	19,7	4,4
Soleil (calculé).	Sp. normal...	1,9	15,4	31,8	50,5	**100**	79,4	62,2	36,5	46,4	19,1

employée par moi, à l'action A_1 de la lumière solaire, en prenant $\frac{A}{A_1} = 1$ pour $B\frac{1}{2}C$, on trouve, comme moyennes des trois séries d'expériences,

pour $\lambda =$	$C\frac{1}{2}D$	D	$D\frac{1}{2}E$	$E\frac{1}{2}b$	$E\frac{1}{2}F$	F	G
$\frac{A}{A_1} =$	0,74	0,67	0,52	0,40	0,31	0,25	0,14.

Ces valeurs s'accordent bien avec celles qui ont été obtenues par la comparaison spectrométrique au moyen de l'œil, ou au moyen de la pile thermoélectrique. En général, le décroissement du rapport vers l'extrémité violette, tel qu'il résulte de mes expériences, est un peu plus lent que celui donné par la plupart de ces déterminations (Vierordt, Crova, O. E. Meyer, Pickering, Mouton, etc.). Cela tient probablement à la supériorité de pouvoir éclairant du brûleur de Sugg qui a servi à mes expériences. Comparé aux becs d'Argand ou de Bunsen, ordinairement employés, il donne une lumière plus blanche.

Si, à l'aide de notre tableau, on calcule les valeurs de $\frac{A}{A_1}$ seulement pour les régions du spectre dans lesquelles ont eu lieu le plus grand nombre d'expériences ($B\frac{1}{2}C$, D, $E\frac{1}{2}B$), et qu'on pose de nouveau $\frac{A}{A_1} = 1$ en $B\frac{1}{2}C$, on trouve respectivement pour les cellules vertes, jaune-brunâtre et vert-bleuâtre:

	D	$E\frac{1}{2}b$
cellules vertes	0,659	0,404
„ jaune-brunâtre . . .	0,670	0,402
„ vert-bleuâtre	0,690	0,382

Dans chacune de ces deux séries de nombres, l'accord est si grand que, prenant en considération la multiplicité et la variabilité des circonstances [1]) qui influent sur les valeurs de A et A_1,

[1]) Nommons seulement: la constitution de la lumière du soleil, suivant la distance zénithale et l'état de l'atmosphère; la grandeur (absolue et relative par rapport à l'image spectrale), la forme, la nuance de couleur, etc. des cellules assimilatrices; la grandeur, le nombre, le besoin d'oxygène, la mobilité des bactéries servant de réactif.

on peut le regarder comme parfait. Il fournit donc une preuve entièrement objective de l'applicabilité de la méthode bactérienne aux déterminations photométriques.

Pour que, provisoirement, on puisse encore mieux juger du degré de confiance que la méthode mérite, je communique ci-dessous, en I, II et III, les détails de quelques expériences: une comparaison de la lumière du gaz avec la lumière d'une lampe à incandescence d'Edison alimentée par 20 éléments de Grove, une série d'observations sur *Melosira*, et deux déterminations, sur une seule et même cellule (*Euglena*), de la marche de l'énergie assimilatoire dans le microspectre de la lumière solaire, avant et après l'intercalation d'une solution de chlorophylle entre la source lumineuse et la fente [1]). L'exposition complète et la critique approfondie de la méthode restent réservées pour une communication ultérieure.

---

[1]) I. Expérience du 4 novembre. Energie assimilatoire d'un exemplaire de *Scenodesmus 4-caudatus* large de 0,0076 mm., déterminée successivement, sans intervalle entre les observations, dans le microspectre de la

	$B\frac{1}{2}C$	D	$E\frac{1}{2}b$	F
lumière du gaz	100 (5)	15,1 (5)	4,2 (4)	2,9 (3)
„ d'Edison.......	100 (5)	15,5 (5)	4,3 (6)	3,0 (6).

Les deux sources ont donc fourni des lumières de la même composition, résultat d'ailleurs conforme à celui de la comparaison optique, laquelle n'a dévoilé aucune différence sensible. Dans les expériences avec la lumière du gaz, le spectre était projeté par l'objectif *B* de Zeiss, dans celles avec la lumière d'Edison, un peu plus faible, par l'objectif *C*.

II. Exp. du 20 nov. *Melosira*, chaîne de trois cellules, larges de 0,018 mm. Microspectre (lumière du gaz) projeté au moyen de l'objectif *B*. Observation successive en six régions différentes du spectre, alternativement dans la direction du rouge au violet et dans la direction opposée. Entre deux déterminations, on changeait chaque fois l'oculaire et la longueur du tube, pour éliminer l'influence possible du jugement relatif à la clarté. Les nombres donnent directement (en millièmes de millimètre) les largeurs de fente pour lesquelles, aux points respectifs du spectre, la réaction devenait insensible.

Le résultat de beaucoup le plus important, sous le rapport physiologique, des séries d'expériences résumées dans le tableau ci-dessus concerne les relations entre la couleur des cellules et l'action assimilatoire des différents rayons lumineux. Si, au-dessous de chacune des quatre courbes qui, pour les quatre catégories de cellules, représentent l'énergie assimilatoire en fonction de la longueur d'onde dans le spectre normal prise pour abscisse, on dessine le spectre d'absorption des cellules de la même couleur, on reconnaît immédiatement que, dans chacun des quatre cas, l'absorption lumineuse et l'assimila-

---

	$B\frac{1}{2}C$	$C\frac{1}{2}D$	D	$D\frac{1}{2}E$	$E\frac{1}{2}b$	F
	8	15	20	26	37	110
	7	13	18	29	40	108
	6,5	15	18	27,5	42	105
	8,5	13,5	20	29	40	112
	8	12,5	20	23	41	110
Moyenne	7,6	13,8	19,3	26,9	40	109
Energie assimilatoire relative (dans le spectre prismatique)..	100	55,1	39,6	28,3	19,0	7,0

III. Exp. du 10 avril 1882. *Euglena viridis* sous la forme globuleuse de l'état de repos (diamètre 0,022 mm.). Spectre projeté au moyen de l'objectif *A*. La première des deux séries de nombres contient les valeurs relatives de l'énergie assimilatoire dans le spectre de la lumière solaire directe, qui avait traversé une couche de 5 mm. d'épaisseur d'une solution alcoolique de chlorophylle et montrait les cinq bandes d'absorption de la „chlorophylle modifiée" de Stokes; la situation de ces bandes est indiquée par I, II, etc. La seconde série donne les valeurs correspondantes après éloignement de la solution de chlorophylle et intercalation d'une plaque de verre incolore, dépolie. Chaque nombre est la moyenne de seulement deux mesures. Les déterminations eurent de nouveau lieu, dans chaque série, en allant successivement vers les deux extrémités du spectre.

	$a\frac{1}{2}B$	$B\frac{1}{2}C$	$C\frac{1}{3}D$	$C\frac{2}{3}D$	$C\frac{7}{8}D$	$D\frac{2}{3}E$	E	b	$b\frac{1}{2}E$	$F\frac{1}{7}G$	$F\frac{2}{7}G$
		I		II		III		IV			V
1.	90,9	12,3	100	54,4	90,9	29,4	55,5	25,0	30,3	14,3	5,3
2.	37,5	100	71,4	48,3	42,8	26,3	17,6	19,9	24,6	23,1	23,4

On remarque que, dans la série 1, un minimum de l'énergie assimilatoire correspond à chaque bande d'absorption, tandis que la série 2 présente le caractère ordinaire, en général directement opposé.

tion marchent en général d'accord: les maxima du dégagement d'oxygène coïncident toujours avec des maxima d'absorption, les minima avec des minima, et réciproquement.

Cette relation fondamentale ressort surtout d'une manière très frappante des expériences avec la lumière solaire. Voici ce qu'elles nous montrent.

Pour les cellules vertes, le maximum absolu de l'action assimilatoire est situé dans le rouge entre *B* et *C*, à l'endroit de la première et la plus apparente bande d'absorption de la chlorophylle, tandis que le rouge extrême, qui est très peu absorbé, n'a qu'une action très faible. Un minimum se trouve dans le vert, à peu près entre *E* et *b*, rayons pour lesquels le coefficient d'absorption paraît être aussi un minimum; un second maximum, très prononcé, existe dans le bleu, près de *F*, à l'origine de la forte dernière bande d'absorption.

Pour les cellules jaune-brunâtre, on trouve de nouveau un premier maximum très accusé dans le rouge entre *B* et *C*, maximum correspondant à la première bande d'absorption, qui, pour ces cellules aussi, est fortement développée; un minimum se voit dans l'orangé et le jaune, en accord avec la perméabilité plus grande des cellules pour ces rayons. Le maximum absolu est atteint dans le vert, près de $D \frac{1}{2} E$, où l'absorption aussi est très considérable. Plus loin, l'action décroît, mais, conforformément à l'absorption énergique dans le bleu et le violet, d'une manière relativement lente.

Pour les cellules vert-bleuâtre, le maximum absolu n'est plus situé entre *B* et *C*, bien que, en harmonie avec la notable absorption en ce point, l'action assimilatoire y soit déjà très vive, mais dans le jaune, qui est fortement intercepté; relativement très faible est l'action des rayons verts et surtout des rayons bleus, lesquels, en effet, sont comparativement très peu absorbés.

Chez les cellules rouges, que jusqu'ici je n'ai encore pu étudier que dans le spectre de la lumière du gaz, le maximum absolu de l'action assimilatoire, pour cette lumière, se trouve

même dans le vert, où, incontestablement, a lieu aussi l'absorption proportionnelle la plus forte. En *B C*, correspondant à la première bande d'absorption du spectre de ces cellules, est situé un second maximum, déjà moindre, mais encore bien accusé; un minimum existe dans le rouge, vers $C \frac{1}{2} D$. — Pour la lumière solaire, le calcul donne essentiellement la même chose; en outre, dans le bleu, près de *F*, un second maximum, moins élevé, qui répond à l'absorption un peu plus forte dans cette région.

Ainsi se trouve confirmé en général, — ce qui pouvait d'avance être attendu avec beaucoup de probabilité (mais non, comme le croyait M. Lommel, prédit avec certitude), — que les rayons lumineux exercent une action assimilatoire d'autant plus énergique qu'ils sont absorbés en plus forte proportion. Pour les cellules vertes, les expériences très soignées de M. C. Timirjazeff [1]), faites sur des bandes de feuilles de Bambou, avaient déjà prouvé qu'un maximum d'action assimilatoire se trouve au point de l'absorption la plus forte, dans le rouge. Comment doivent probablement s'expliquer les résultats en apparence contradictoires des expériences de MM. Draper, Sachs et Pfeffer, exécutées suivant les anciennes méthodes sur des objets macroscopiques, c'est ce que j'ai déjà montré dans une communication antérieure [2]). Quant aux plantes brunes, bleues et rouges, de dimensions macroscopiques, elle n'ont encore, que je sache, été soumises à aucune expérience d'après ces anciennes méthodes. Il est à présumer, toutefois, qu'elles présenteraient des écarts analogues à ceux qui existent chez les plantes vertes.

---

[1]) *Ann. de Chimie et de Phys.* (5) t. XII, 1877, p. 355. Ce travail n'a pas obtenu jusqu'ici, des phytophysiologistes allemands, l'estime qu'il mérite. Il a droit à une place d'honneur dans l'histoire de la théorie de l'assimilation.

[2]) *Ueber Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospectrum*, dans *Bot. Ztg.*, 1882, N°. 26.

III. Conséquences ultérieures.

La relation entre l'absorption et l'assimilation, dévoilée dans ce qui précède, conduit à une série de conséquences, dont quelques-unes des plus importantes peuvent seules être indiquées ici.

Avant tout, il en résulte que dans le règne végétal, outre la chlorophylle, il existe encore une série d'autres matières colorantes accomplissant la fonction assimilatoire. Il n'est pas permis d'admettre, comme on le fait généralement aujourd'hui, que là où l'œil armé ne peut pas découvrir dans la cellule vivante la matière colorante verte ordinaire (Diatomées, Floridées, etc.), celle-ci n'en existe pas moins et est seulement masquée par une autre matière colorante, inactive quant à l'assimilation. Car, s'il en était ainsi, l'énergie assimilatoire relative des divers rayons lumineux chez les cellules jaunes, bleues ou rouges devrait, comparée aux valeurs trouvées pour les cellules vertes, s'en éloigner en général dans un sens opposé à celui que les faits assignent. Evidemment, la matière colorée masquante agirait comme un écran et affaiblirait par conséquent, dans leur action sur la chlorophylle, les genres de rayons absorbés par elle. C'est ainsi, par exemple, que pour les cellules rouges l'action assimilatoire des rayons verts devrait être relativement beaucoup plus faible que pour les cellules vertes, et que, pour les cellules bleues, l'action de la lumière jaune devrait être relativement moindre et celle de la lumière bleue relativement plus grande que pour ces mêmes cellules vertes. Or, en réalité, c'est précisément le contraire. Toujours, ce sont les espèces de lumière complémentaires de la couleur propre qui agissent principalement.

A toutes ces matières remplissant comme la chlorophylle, — mais chacune, suivant sa couleur, dans une autre dépendance de la long ueur d'onde, — la fonction assimilatoire, on peut, pour

abréger, donner le nom de *chromophylles* [1]), en laissant provisoirement indécise la question de savoir si chacune d'elles est une combinaison chimique particulière ou un mélange de différentes matières colorantes assimilatrices, et si, dans ce dernier cas, leur mode de participation à l'acte assimilatoire est essentiellement le même. La physiologie n'a proprement à s'occuper que de la matière colorante active de la cellule vivante, non des matières colorantes qu'on peut, par des moyens quelconques, extraire des cellules mortes. A la première seule je voudrais voir appliquer le nom de chromophylle, et il serait peut-être à désirer que les expressions chlorophylle, xanthophylle, cyanophylle, rhodophylle ne fussent aussi employées que pour désigner les matières colorantes vivantes des plantes vertes, des Diatomées, Cyanophycées, Floridées, etc. Pour les produits colorés obtenus de celles-ci par l'action des dissolvants, on pourrait alors introduire des dénominations spéciales, ce qui d'ailleurs presse d'autant moins que ces produits ne sont encore nullement définis sous le rapport chimique et, au point de vue de la physiologie, sont provisoirement à peu près dépourvus de toute importance. Aucun chimiste ni physiologiste ne contestera, en effet, qu'au sujet de ces matières colorantes il s'est accumulé, surtout par l'emploi exclusif de l'analyse spectrale, une masse de faits, qui ont bien conduit à une déplorable confusion de la nomenclature, mais qui n'ont fait faire aucun progrès sérieux ni à la connaissance chimique des matières examinées, ni à l'intelligence de leur rôle physiologique.

En ce qui concerne la question de savoir si les chromophylles

---

[1]) Cette expression me semble devoir être préférée à celles d'*endochrome* et de *phytochrome*, applicables dans le même sens, attendu que par le son elle rappelle immédiatement l'idée de chlorophylle et, par suite, d'assimilation. Peut-être conviendrait-il d'appeler „phytochromes" toutes les matières colorantes quelconques qui se rencontrent dans les cellules végétales, et de réserver la désignation d'„endochromes" à celles de ces matières qui se trouvent au sein du liquide cellulaire, dans la vacuole centrale.

différemment colorées représentent autant d'espèces chimiques différentes, ou bien des mélanges différents de chlorophylle avec une ou plusieurs autres matières colorantes assimilatrices, je remarquerai ce qui suit. Les innombrables nuances et teintes de passage que présentent les couleurs des plantes, différences qui se rencontrent souvent dans une même espèce, voire dans un même individu, et qui ne se laissent pas expliquer d'une manière satisfaisante par des différences de concentration, d'épaisseur des couches, etc., indiquent décidément qu'on a affaire à des mélanges Vis-à-vis de ces faits, l'extrême uniformité de coloration qu'on observe, presque sans exception, chez les différents corpuscules chromophylliens de la même cellule, ainsi que dans chaque corpuscule séparément, ne semble pas fournir une raison suffisante pour admettre qu'il s'agisse de combinaisons en proportions fixes.

Au reste, on peut douter que la question soit, physiologiquement, d'une importance fondamentale. Car, en tout cas, — et c'est là, semble-t-il, le point essentiel quant à l'action de la lumière, — au sein de chaque grain de chromophylle on a affaire à un assemblage moléculaire, c'est-à-dire, les particules de matière colorante sont mêlées si intimement et si uniformément aux particules incolores du stroma, qu'entre les unes et les autres il peut se produire partout des actions moléculaires. Ainsi que je l'ai déjà montré ailleurs [1]), le cas diffère donc en principe, malgré quelque ressemblance extérieure, de celui que présentent les états rouges, jaunes, etc., d'algues vertes.

En admettant que les chromophylles non vertes soient des mélanges d'une matière colorante verte et d'une ou plusieurs autres matières colorantes, on doit se demander si le mode d'action de toutes ces matières est essentiellement le même et seulement, pour chacune d'elles, une fonction différente de la longueur d'onde. Comme la matière colorante verte, caractérisée par la forte absorption des rayons situés entre B et C, paraît ne manquer dans aucun cas, on est naturellement porté à lui

[1]) *Ueber Assimilation von Haematococcus* (*Bot. Ztg.*, 1882, n°. 39).

attribuer dans l'acte d'assimilation un rôle spécifique plus fondamental qu'aux matières, de coloration différente, qui lui sont associées. Ces dernières pourraient alors, par exemple, agir simplement à titre de sensibilisateurs optiques, comme, d'après les importantes recherches de M. H. W. Vogel [1]), beaucoup de matières colorantes agissent à l'égard des sels haloïdes d'argent, et comme, dans l'œil, le pourpre visuel et le vert visuel le font peut-être aussi à l'égard de la substance sensible à la lumière des articles extérieurs des bâtonnets. Mais, il y a aussi des raisons à produire à l'encontre de l'hypothèse sus-énoncée. C'est ainsi que, surtout dans la chromophylle des Algues rouges (Floridées), la matière colorante verte se trouve fréquemment, sinon habituellement, en proportion si minime, qu'elle apparaît comme un élément sans importance, mélangé au corps rouge, plutôt que comme l'élément principal. Aussi, dans ces cas, l'effet assimilatoire des rayons entre B et C est-il (voir le Tableau, p. 37) extrêmement petit, comparé à celui des rayons verts. Il est plus probable, d'après cela, que toutes les matières colorantes agissent de la même manière dans le processus d'assimilation. En outre, l'idée qui se présente la première, c'est que cette action est essentiellement analogue à celle des sensibilisateurs optiques [2]). Le stroma (en apparence) incolore du corps chromophyllien correspondrait alors à la plaque photographique, dont l'impressi-

[1]) H. W. Vogel, *Ueber die Lichtempfindlichkeit des Bromsilbers für die sogenannten chemisch unwirksamen Strahlen*, dans *Annalen der Physik und Chemie*, CL, 1873, p. 453. — *Ueber die fortsetzenden Strahlen* Becquerel's, dans *Berichte des d. chem. Ges.*, VI, 1873, p. 1489. — *Ueber die chemische Wirkung des Sonnenspectrums auf Silberhaloidsalze*, dans *Ann. d. Phys. und Chem.*, CLIII, 1874, p. 218. — *Ueber die Beziehungen zwischen Lichtabsorption und Chemismus*, dans *Monatsber. d. Berliner Akad.* 1875, p. 82.

[2]) Une pareille présomption a déjà été émise aussi, en ce qui concerne la chlorophylle, par M. Timirjazeff (l. c.). A l'appui, il cite spécialement la constation faite par M. E. Becquerel, à la suite des découvertes de M. H.-W. Vogel, de l'action sensibilisatrice de la chlorophylle sur l'iodure et le bromure d'argent, action qui, depuis lors, a aussi été confirmée par M. Ch. Cros (*Compt. rend.*, LXXXVIII, 1879, p. 379).

onnabilité absolue et relative, pour les différentes longueurs d'onde, dépend principalement du pouvoir d'absorption optique des matières colorantes ajoutées en mélange.

Rappelons, en passant, l'opinion de M. Pringsheim, que les corps chromophylliens vivants contiendraient la matière colorante à l'état de dissolution dans une "graisse" ou une „huile". Cette solution, que M. Pringsheim appelle „lipochlore" ou „graisse chlorophyllienne", remplirait les mailles d'un stroma spongieux incolore, et serait le siège des "processus physiologiques, de l'échange des gaz, provoqués par la lumière", donc aussi de l'assimilation. Si l'expression "graisse" doit être prise ici dans l'acception habituelle, et que le lipochlore doive par conséquent être un éther glycérique ou un mélange d'éthers glycériques, comme les huiles grasses ordinaires, cette opinion n'est pas soutenable. Quelques-unes des réactions de ces corps, et précisément des plus importantes et des plus sensibles, font en effet défaut chez les corps chromophylliens. Il s'agit de la coloration en noir par l'acide chromique et de la coloration en violet foncé par le chlorure d'or. J'ai fait agir ces deux réactifs, — dans lesquels les vraies huiles grasses, même celles qui contiennent du pigment, comme les globules huileux colorés de la rétine des Oiseaux, etc., prennent en peu de temps une couleur foncée intense, — à des degrés de concentration très différents (0,1—4 pour cent) et dans des conditions très variées, sur beaucoup de cellules végétales vivantes, sans obtenir la moindre trace d'action. Fréquemment, il est vrai, d'autres éléments de la cellule prirent rapidement la coloration caractéristique, indiquant la présence de corps fortement réducteurs. C'est ainsi que, chez différentes espèces de *Spirogyra*, tout le liquide cellulaire devint au bout de quelques instants d'un noir d'encre [1]);

---

[1]) En général, la réaction présente, pour toutes les cellules du même filament, une intensité égale, ou du moins presque égale. Parfois elle se borne, surtout au début, à une couche médiocrement large, contiguë aux parois transverses des cellules. De nouvelles recherches sur ces phénomènes ne peuvent qu'être recommandées.

chez une espèce d'*Ectocarpus* à grosses bandes jaunes chromophylliennes, des groupes de grains anguleux, inclus çà et là dans le protoplasma incolore, subirent bientôt la coloration en noir; chez les *Vaucheria*, une coloration évidente, quoique faible, se produisit dans les gouttelettes très réfringentes, originairement incolores, qui se trouvent sur ou entre les grains de chlorophylle et qui sont regardées comme de nature grasse (Borodin); etc. Mais les corps chromophylliens restèrent toujours indemnes. Même après plusieurs heures, leur couleur ne montrait parfois aucun changement appréciable. On ne peut douter, d'après cela, qu'en général les corps chromophylliens ne contiennent pas d'huile grasse [1]), et que la matière colorante ne peut donc pas y exister en solution dans une pareille matière. Il y a plus de probabilité, à en juger par les réactions connues, pour la présence d'une combinaison céroïde, opinion qui d'ailleurs a été énoncée depuis longtemps.

M. Pringsheim invoque aussi les phénomènes de l'échange des gaz, notamment l'égalité approximative des volumes de gaz absorbés et dégagés, pour rendre vraisemblable l'existence de corps gras dans les grains de chlorophylle, et il croit pouvoir affirmer, tout au moins, que le produit primaire de l'assimilation doit être une combinaison contenant moins d'oxygène qu'un hydrate de carbone. Le corps qu'il a en vue est celui auquel il a donné le nom d'hypochlorine, mais dont la composition est encore absolument inconnue. L'habile morphologue reproche aux phytophysiologistes d'avoir jusqu'ici, dans l'interprétation des expériences sur l'échange des gaz, complètement oublié la circonstance que, pendant qu'elle assimile, la plante respire aussi, c'est-à-dire, absorbe de l'oxygène. Je ne pense pas que les physiologistes aient commis cette faute. Mais ils se sont rappelé en outre, ce que M. Pringsheim oublie de son côté, que

[1]) Cela n'empêche pas, bien entendu, que dans quelques cas particuliers des gouttes de matière grasse ne puissent réellement se rencontrer dans la chlorophylle, comme chez les Musacées, d'après M. Briosi.

le même acte dégage de l'acide carbonique, et cela en volume approximativement égal à celui de l'oxygène absorbé. La constance du volume des gaz, généralement observée, prouve donc que dans l'assimilation il se dégage, en somme, un volume d'oxygène aussi grand que le volume d'acide carbonique absorbé. Or ce fait est entièrement en harmonie avec l'idée, accréditée surtout par M. Sachs, qu'il se forme dès l'abord un hydrate de carbone, encore que cet hydrate ne soit peut-être pas le produit absolument primitif de l'assimilation.

Que la chlorophylle soit le premier produit de l'assimilation, comme beaucoup l'ont soutenu et comme, même aujourd'hui, M. Pringsheim ne le juge pas encore impossible, c'est là une opinion contre laquelle les résultats de mes recherches sur les relations entre la longueur d'onde et l'énergie assimilatoire fournissent un argument nouveau et, à ce que je crois, péremptoire. Comment la couleur du produit pourrait-elle déterminer l'énergie du processus par lequel ce produit doit lui-même être formé? Prétendra-t-on que les longueurs d'onde le plus absorbées par la matière colorante sont justement celles qui en déterminent la formation? Pour aucune matière colorante, à ma connaissance, une semblable relation n'a été établie, et, en ce qui concerne la chlorophylle, on sait par M. Sachs que la production n'en est même pas toujours liée à l'action de la lumière. Là où il en est réellement ainsi, il n'existe cependant, d'après les expériences de MM. Guillemin, Sachs, Wiesner et autres, aucune indication nette d'une relation dans le sens ci-dessus spécifié.

Indirectement, à la vérité, une pareille influence doit se faire sentir. Puisque, comme le montrent mes expériences, les longueurs d'onde le plus aborbées exercent en toutes circonstances la plus forte action assimilatoire, elles devront être pour la végétation en général, pour l'accroissement et la formation de nouvelles cellules, donc aussi pour la formation de nouvelle chromophylle, les plus efficaces. A cette circonstance je crois pouvoir rapporter quelques faits relatifs à la distribution locale,

spécialement à la distribution en profondeur, des Algues marines.

On sait qu'aux grandes profondeurs, et généralement dans les lieux où la lumière ne peut parvenir qu'à travers une très longue couche d'eau marine (grottes bleues et vertes) règnent les formes rouges, tandis que les vertes disparaissent déjà ordinairement, d'une manière complète, à une profondeur très modérée.

Oersted [1]) voulait même distinguer, sous le rapport de la profondeur, quatre régions, caractérisées par la coloration différente des plantes (et des animaux): une région supérieure, celle des plantes et animaux verts; une seconde, des bruns; une troisième, des rouges; et une quatrième, la plus profonde, dépourvue de plantes, celle des animaux blancs. Bien qu'une pareille division ne puisse, à beaucoup près, être appliquée rigoureusement, elle contient pourtant une bonne part de vérité. Notamment, tous les observateurs plus récents confirment la limitation des formes vertes aux couches superficielles, la prédominance des formes rouges dans les couches profondes et les plus profondes. C'est ainsi que M. G. Berthold, dans l'importante étude qu'il vient de faire paraître sur la distribution des Algues dans le golfe de Naples [2]), remarque: „que la végétation des parois rocheuses ombragées, des grottes, ainsi que celle des profondeurs un peu grandes, prend un caractère propre très distinct". L'influence probable de la lumière dans ce phénomène, il incline, comme d'autres avant lui, à l'attribuer essentiellement à la seule différence de l'intensité lumineuse.

Il est évident toutefois, et le simple aspect de la mer en des points inégalement profonds suffit à le montrer, qu'avec l'épaisseur de la couche aqueuse parcourue par la lumière varie non seulement l'intensité de celle-ci, mais aussi sa qualité. Déjà en

---

[1]) A. Oersted, *De regionibus marinis. Elementa topogr. etc. Diss. inaug.*, Hauniæ, 1844.

[2]) *Mittheilungen aus der zool. Station zu Neapel*, t. III, 1882, p. 415.

couche médiocrement épaisse, l'eau paraît verte ou vert-bleuâtre. Dans le spectre que la lumière solaire formait après avoir traversé un tube rempli d'eau pure, long de 14 mètres, M. Boas [1]) constata l'absence complète du rouge; le jaune n'était que faiblement développé, le maximum de clarté se trouvait dans le vert. Des résultats analogues ont été obtenus par d'autres observateurs (Wild, Forel, Schönn, Aitken, etc.). Ainsi, dès les faibles profondeurs, les rayons verts et vert-bleuâtre ont une intensité relativement beaucoup plus grande, les rayons rouges et jaunes une intensité relativement plus petite, que dans la lumière primitive. Or, comme justement les rayons rouges sont les plus efficaces pour l'assimilation des cellules vertes, tandis que les rayons verts n'y contribuent que peu, les plantes colorées en vert doivent, à partir de profondeurs médiocres, avoir le désavantage vis-à-vis des cellules colorées en rouge, dans lesquelles ce sont précisément les rayons verts qui exercent l'action assimilatoire de beaucoup la plus énergique.

Il est donc naturel qu'à une profondeur suffisante les formes rouges triomphent partout dans la lutte pour l'existence, et de même, à une profondeur moindre, partout où la lumière, exclusivement (grottes bleues [2])) ou en grande partie (déclivités rocheuses sous-marines et ombragées), n'atteint les plantes qu'à la suite d'un long trajet dans l'eau. Le fait que les formes rouges sont aussi très fréquentes dans les stations superficielles et exposées en pleine lumière, ne constitue pas, évidemment, une difficulté, pas plus qu'il n'y aurait d'importance à attacher à la rencontre de quelque forme verte isolée à une profondeur notable.

---

[1]) F. Boas, *Beiträge zur Erkenntniss der Farbe des Wassers. Inaug.-Diss.*, Kiel, 1881.

[2]) Dans la lumière de la grotte bleue de Capri, M. H.-W. Vogel (*Annalen d. Physik u. Chemie*, CLVI, 1875, p. 325), ne trouva pas trace de rouge, le jaune était très affaibli, la raie *D* à peine reconnaissable; par contre, le vert, le bleu et l'indigo apparaissaient vivement. Les raies *E* et *b* étaient confondues en une large bande.

Si dans le golfe de Naples, comme nous l'apprend M. Berthold, les formes rouges prédominent aussi sur des fonds ombragés très rapprochés de la surface, on peut se demander si la couleur bleu intense persistante du ciel italien ne joue pas un rôle dans ce phénomène. Peut-être que dans le nord, sous l'influence prépondérante de la lumière blanche d'un ciel plus nébuleux, cette relation s'accuse moins et la distribution se rapproche davantage de la règle énoncée par Oersted.

D'après les résultats de la méthode des bactéries (voir le tableau p. 37 sub II), nous pouvons nous attendre aussi à voir les cellules jaunes et brunes descendre plus bas que les rouges. Car, dans le vert et le bleu, elles assimilent encore, relativement, avec plus d'énergie que les cellules vertes. Cette présomption est également d'accord, en général, avec la distribution d'Oersted, ainsi qu'avec l'ensemble des faits connus.

Pour les mêmes raisons, les formes vert-bleuâtre devront prospérer surtout dans les couches superficielles de l'eau, ce qui est effectivement le cas.

Si la partie du spectre jouissant à un degré quelconque de l'activité assimilatoire (à peu près de la longueur $\lambda = 0,765\,\mu$ à $\lambda = 0,395\,\mu$) est partagée vers $\lambda = 0,58\,\mu$ en deux moities égales, et que, sur les courbes de l'énergie assimilatoire construites d'apres les chiffres de notre tableau (p. 37), nous déterminions, par la pesée ou à l'aide du planimètre, le rapport de l'action assimilatoire totale, A_r, de la moitié moins réfrangible à celle, A_b, de la moitié plus réfrangible, pour les quatre catégories de cellules différemment colorées, nous obtenons:

pour les cellules vert-bleuâtre .	$A_r : A_b$	$= 1 : 0,53$
» » » vertes	» »	$= 1 : 1,00$
» » » jaune-brunatre	» »	$= 1 : 1,18$
» » » rouges	» »	$= 1 : 2,48$.

Ce changement graduel du rapport, en faveur de la moitié plus réfrangible, répond donc entièrement au changement pro-

gressif que subit, à mesure de l'accroissement de profondeur de la couche d'eau, le rapport de l'énergie actuelle totale des deux moitiés du spectre solaire. Ce n'est sans doute pas un pur effet du hasard si pour la couleur verte, décidément prédominante à la surface terrestre, le rapport $A_r : A_b$ est égal à l'unité, comme l'est, d'après les recherches thermo-électriques de J. W. Draper [1]), le rapport de l'énergie totale des deux moitiés.

Il reste à désirer, pour la solution définitive de toutes ces importantes questions, que des déterminations quantitatives exactes, par la voie de l'analyse spectrale, soient entreprises sur la lumière ayant traversé des couches d'eau d'épaisseur différente. Les recherches faites jusqu'ici, quel qu'en soit l'intérêt, ne satisfont pas encore aux légitimes exigences de la biologie. Les principales des déterminations nécessaires se laisseraient probablement exécuter sans peine par les méthodes employées jusqu'à présent. De plus, en présence du perfectionnement incessant apporté aux appareils de plongeur et à l'éclairage électrique, je ne vois pas quels obstacles insurmontables pourrait rencontrer une spectro-photométrie sous-marine.

Mais en outre, et avant tout, il sera encore nécessaire d'étudier avec soin, quantitativement, les spectres d'absorption des différentes chromophylles vivantes. Mes expériences ont bien mis hors de doute que, en général, l'absorption et l'assimilation suivent une marche parallèle, mais il serait du plus haut intérêt que ces relations quantitatives entre les deux fonctions fussent établies avec une entière exactitude. La connaissance précise des coefficients d'absorption des différentes longueurs d'onde, combinée avec la connaissance de la grandeur relative de l'effet assimilatoire de ces mêmes longueurs d'onde, peut conduire à des conclusions physiologiques d'une très grande portée, ainsi qu'à d'importants résultats physiques. Sous le premier rapport, on pourra en

---

[1]) J. W. Draper, *Researches in Actino-Chemistry*. I. *On the distribution of Heat in the Spectrum* (*Phil. Mag.*, [4] XLIV, 1872, p. 104).

déduire si, dans chaque cas particulier, l'action assimilatoire (A) d'un rayon de longueur d'onde déterminée (λ) ne dépend réellement, comme mes expériences tendent à le faire admettre en général, que de l'énergie actuelle (E) et du coefficient d'absorption (n) de ce rayon; sous le second rapport, on a la perspective d'obtenir ainsi une détermination de l'énergie actuelle relative des différents rayons du spectre de la source lumineuse employée (soleil, flamme du gaz, etc.).

D'après des considérations mécaniques générales, on doit s'attendre à ce que A soit proportionnel à E: aussi longtemps, du moins, que E ne dépasse pas une certaine valeur élevée, car il est clair qu'une masse donnée de chromophylle, même dans les conditions les plus favorables, ne peut dégager, en un temps donné, qu'une certaine quantité absolue d'oxygène. La valeur de E, pour laquelle cela a lieu, est la valeur maximum. Pratiquement, il ne paraît guère possible de donner, dans le microspectre, une pareille intensité maxima à un mince faisceau de rayons d'une longueur d'onde égale. Dans mes expériences, au moins, le maximum du dégagement d'oxygène ne paraissait pouvoir être atteint, même en employant la lumière solaire directe, que par la coopération des rayons d'une portion un peu plus grande du spectre. Les conditions sous lesquelles A est déterminé dans le microspectre satisfont donc toujours, semble-t-il, aux restrictions qui doivent être posées relativement à E.

Une preuve directe que — au moins entre d'assez larges limites d'intensité lumineuse — A est directement proportionnel à E, pourrait être cherchée déjà dans les expériences dont les résultats ont été communiqués ci-dessus (tableau, p. 37), car, malgré des différences très grandes dans les valeurs absolues de E, ces expériences ont toujours donné le même rapport pour l'effet assimilatoire de rayons de même longueur d'onde, qu'ils provinssent de la lumière du soleil ou de celle du gaz. Toutefois, les mesures que j'ai exécutées jusqu'ici ne suffisent pas encore, à mon avis, pour constituer dans cette voie une preuve vraiment rigoureuse.

Provisoirement, on peut supposer aussi une proportionnalité directe entre le coefficient d'absorption et l'action assimilatoire. Le parallélisme si remarquable qu'ont offert l'absorption et l'assimilation, chez quatre espèces différentes de chromophylles, nous oblige à admettre au moins un rapport simple entre A et n. Ce parallélisme ne saurait être dû au hasard. En vertu de considérations mécaniques générales, la simple proportionnalité est de nouveau le rapport le plus probable.

Si ces deux présomptions sont justes, et qu'ainsi A dépende exclusivement de E et de n, on a pour toute longueur d'onde

$$A = n\,E,$$

d'où

$$E = \frac{A}{n}.$$

A se trouve directement au moyen de la méthode des bactéries dans le microspectre. Ses valeurs sont déjà connues par mes expériences avec une exactitude suffisante pour un assez grand nombre de longueurs d'onde, chez des chromophylles vertes, brunes, bleues et rouges. Les valeurs de n doivent être déterminées microspectralement, par la comparaison des intensités J de la lumière entrante et J' de la lumière transmise pour chaque longueur d'onde. Naturellement, il faut tenir compte de la lumière réfléchie; en outre, ni J ni J' ne doivent atteindre des valeurs extrêmes, c'est-à-dire, la clarté ne doit être ni excessive, ni à peine appréciable. Cette dernière condition peut être remplie aisément, la seconde, au moins à un degré suffisant.

On obtiendra ainsi des séries de valeurs, desquelles se déduira aussi la forme de la liaison entre l'énergie et la longueur d'onde,

$$E = f(\lambda),$$

pour la source lumineuse employée.

S'il se trouvait alors que les séries d'expériences relatives aux chromophylles différemment colorées conduisissent toutes à la même forme pour $f(\lambda)$, il en résulterait une preuve tout à fait objective de la justesse des suppositions faites ci-dessus

concernant le rapport entre l'assimilation, d'une part, l'énergie et l'absorption de la lumière, d'autre part; car l'exactitude de la relation trouvée entre E et λ serait alors, évidemment, démontrée.

Ce dernier résultat serait d'autant plus précieux, que la distribution de l'énergie dans le spectre, comme on sait, n'est pas encore connue avec une entière certitude. Le seul moyen dont on se soit servi jusqu'ici pour la déterminer, c'est l'action thermique des rayons lumineux. Suivant la manière différente dont ce moyen a été appliqué, on a obtenu des résultats assez divergents. Rappelons seulement les recherches de Draper, Desains, Lamansky, Crova, Mouton et Langley. Les bactéries viendraient donc fixer aussi nos idées sur la constitution de la lumière du soleil.

Que ces espérances seront réalisées à un assez haut degré, c'est ce qui, dès à prèsent, ne me paraît pas douteux. Quand même on reconnaîtrait que nos hypothèses concernant les relations entre A et n ne sont pas rigoureusement exactes, — ce que je regarde comme probable, puisque la lumière absorbée n'exerce pas seulement une action assimilatoire, -- le parallélisme entre l'absorption et l'assimilation, si manifeste dans quatre cas indépendants l'un de l'autre, montre pourtant que ces hypothèses ne peuvent pas s'écarter beaucoup de la vérité. La connaissance et l'étude ultérieure de ces écarts conduiraient d'ailleurs elles-mêmes à d'importantes notions sur les actions de la lumière dans les cellules végétales.

Il s'agit maintenant, avant tout, de déterminer exactement les valeurs des coefficients d'absorption. Pour cela, l'analyse microspectrale quantitative est nécessaire. Un appareil destiné à cet usage, et qui vraisemblablement satisfera sous tous les rapports, me sera bientôt, j'espère, fourni par l'atelier si favorablement connu de C. Zeiss, à Jéna. Le moment venu, je décrirai cet appareil et rendrai compte des résultats qu'il m'aura donnés.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

D'UN

SYTÈME DE LENTILLES CENTRÉES,

PAR

J. BUENO DE MESQUITA.

---

1. M. Ferraris [1]) a déduit des formules très élégantes pour la détermination des points cardinaux d'un système de lentilles.

Dans ces formules, la distance h du premier point cardinal de la première lentille au premier foyer principal du système, la distance k du second point cardinal de la dernière lentille au second foyer principal du système et la distance focale principale Φ du système sont exprimées en fonction des distances focales principales φ des lentilles composantes et des distances δ qui séparent ces lentilles l'une de l'autre.

Lorsque le système de lentilles est donné, les points cardinaux se laissent obtenir, au moyen de ces équations, d'une manière extrêmement simple.

Si, au contraire, on cherche un système optique qui satisfasse à des conditions données, il conviendra généralement de regarder φ_1, φ_n et Φ comme inconnues et de résoudre les équations par rapport à ces quantités.

Comme éclaircissement, je n'ai qu'à renvoyer aux applications que M. Ferraris lui-même a faites de ses équations.

---

[1]) *Atti della R. Accademia delle Scienza di Torino*, Vol. XVI, Nov.— Déc. 1880, p. 45.

Pogg., *Ann.* Beibl., 1881, t. V, p. 500.

La solution par rapport à φ_1, φ_n et Φ des formules de Ferraris exige toutefois des calculs très longs et pénibles, surtout lorsque le système est composé de plus de trois lentilles.

Pour éviter cet inconvénient, j'ai cherché, à l'occasion d'une question pratique, à trouver des formes générales pour les solutions dont il s'agit; ce sont ces formes que je me propose de développer dans le présent Mémoire.

2. Considérons, en premier lieu, un système de deux lentilles centrées. Appelons F_1 et F_1' le premier et le second foyer principal, H_1 et H_1' le premier et le second point cardinal de la première lentille; F_2 et F_2' les foyers principaux, H_2 et H_2' les points cardinaux de la seconde lentille; soient, en outre, F, F', H, H' les foyers principaux et les points cardinaux du système résultant.

La direction de la lumière incidente sera toujours regardée comme positive, et, chaque fois qu'une distance sera indiquée par deux lettres, l'ordre de succession de ces lettres marquera en même temps la direction dans laquelle la distance est mesurée.

En nous bornant au cas particulier où les premier et dernier milieux sont égaux l'un à l'autre, et posant

$$F_1 H_1 = \varphi_1$$

$$F_2 H_2 = \varphi_2$$

$$H_1'H_2 = \delta_2,$$

nous avons:

$$H_1 F = -\varphi_1 - \frac{\varphi_1^2}{\delta_2 - \varphi_2 - \varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$H_2'F' = \varphi_2 + \frac{\varphi_2^2}{\delta_2 - \varphi_2 - \varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$F\ H = - \frac{\varphi_1\ \varphi_2}{\delta_2 - \varphi_2 - \varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

3. Considérons maintenant, dans un système de lentilles centrées, le système composé des lentilles $m^{ième}$, $m+1^{ième}$ .... $n^{ième}$.

Calculons d'abord la distance du second point cardinal de la $n^{ième}$ lentille au second foyer principal du système résultant, ainsi que la première distance focale principale de ce système.

A cet effet, nous devons d'abord appliquer les formules (2) et (3) aux lentilles $m^{ième}$ et $m + 1^{ième}$, puis au système trouvé et à la lentille $m + 2^{ième}$, et continuer de la sorte jusqu'à qu'il ait été tenu compte de toutes les lentilles.

Soient $\varphi_m, \varphi_{m+1} \ldots \varphi_n$ les premières distances focales principales des lentilles [1]. Désignons par $\delta_{m+1}, \delta_{m+2} \ldots \delta_n$ la distance du second point cardinal de la $m^{ième}$ lentille au premier point cardinal de la $m + 1^{ième}$ lentille, la distance du second point cardinal de la $m + 1^{ième}$ lentille au premier point cardinal de la $m + 2^{ième}$ lentille, etc.; par $D_{m+1}, D_{m+2} \ldots D_n$ la distance du second foyer principal de la $m^{ième}$ lentille au premier foyer principal de la $m + 1^{ième}$ lentille, la distance du second foyer principal de la $m + 1^{ième}$ lentille au premier foyer principal de la $m + 2^{ième}$ lentille, etc.

En représentant par $k_{p.q}$ la distance du second point cardinal de la $q^{ième}$ lentille au second foyer principal du système formé des lentilles $p^{ième}$, $p + 1^{ième} \ldots q^{ième}$, et par $\Phi_{p.q}$ la première distance focale principale de ce système, nous trouvons, à l'aide des formules (2) et (3), successivement:

$$k_{m.m+1} = \varphi_{m+1} + \frac{\varphi^2_{m+1}}{\delta_{m+1} - \varphi_{m+1} - \varphi_m} = \varphi_{m+1} + \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}.$$

$$k_{m.m+2} = \varphi_{m+2} + \frac{\varphi^2_{m+2}}{\delta_{m+2} - \varphi_{m+2} - k_{m.m+1}} = \varphi_{m+2} + \frac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}}.$$

$$k_{m.m+3} = \varphi_{m+3} + \frac{\varphi^2_{m+3}}{\delta_{m+3} - \varphi_{m+3} - k_{m.m+2}} = \varphi_{m+3} + \frac{\varphi^2_{m+3}}{D_{m+3} - \frac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}}}$$

etc.

[1]) La seconde distance focale principale a un signe opposé à celui de la première.

et

$$\Phi_{m.m+1} = -\frac{\varphi_m \varphi_{m+1}}{\delta_{m+1} - \varphi_{m+1} - \varphi_m} = -\frac{\varphi_m \varphi_{m+1}}{D_{m+1}}$$

$$\Phi_{m.m+2} = -\frac{\Phi_{m.m+1}\, \varphi_{m+2}}{\delta_{m+2} - \varphi_{m+2} - k_{m.m+1}} = \frac{\varphi_m \varphi_{m+1} \varphi_{m+2}}{D_{m+1}\left(D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}\right)}$$

$$\Phi_{m.m+3} = -\frac{\Phi_{m.m+2}\, \varphi_{m+3}}{\delta_{m+3} - \varphi_{m+3} - k_{m.m+2}} =$$

$$= -\frac{\varphi_m \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \varphi_{m+3}}{D_{m+1}\left(D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}\right)\left(D_{m+3} - \cfrac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+2} - \cfrac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}}\right)}$$

etc.

Posant ensuite :

$$R'_{m+1.n} = \begin{pmatrix} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{pmatrix}$$

et

$$R'_{m+1.n} = \begin{pmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{pmatrix}$$

on a pour le système des $m^{ième}$, $m+1^{ième}\ldots n^{ième}$ lentilles:

$$k_{m.n} = \varphi_n + \frac{\varphi_n{}^2 R'_{m+1.n-1}}{R'_{m+1.n}} = \varphi_n \frac{R''_{m+1.n}}{R'_{m+1.n}}, \ldots (4)$$

$$\Phi_{m.n} = (-1)^{n-m} \frac{\varphi_m \varphi_{m+1} \ldots \varphi_n}{R'_{m+1.n}} \ldots\ldots\ldots (5)$$

4. Pour trouver la distance du premier point cardinal de la $m^{ième}$ lentille au premier foyer principal du système résultant, nous appliquons la formule (1) d'abord aux lentilles $n^{ième}$ et $n-1^{ième}$, puis au système obtenu et à la lentille $n-2^{ième}$, et nous continuons de cette manière jusqu'à ce que toutes les lentilles aient été prises en considération.

Soit $h_{p.q}$ la distance du premier point cardinal de la $p^{ième}$ lentille au premier foyer principal du système composé des lentilles $p^{ième}$, $p+1^{ième}\ldots q^{ième}$.

On trouve alors, en appliquant la formule (1):

$$h_{n-1.n} = -\varphi_{n-1} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{\delta_n - \varphi_{n-1} - \varphi_n} = -\varphi_{n-1} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D}$$

$$h_{n-2.n} = -\varphi_{n-2} - \frac{\varphi^2_{n-2}}{\delta_{n-1} - \varphi_{n-2} + h_{n-1.n}} = -\varphi_{n-2} - \frac{\varphi^2_{n-2}}{D_{n-1}} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}$$

$$h_{n-3.n} = -\varphi_{n-3} - \frac{\varphi^2_{n-3}}{\delta_{n-2} - \varphi_{n-3} + h_{n-2.n}} = -\varphi_{n-3} - \frac{\varphi^2_{n-3}}{D_{n-2}} - \frac{\varphi^2_{n-2}}{D_{n-1}} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}$$

. . . .

$$h_{m.n} = -\varphi_m - \frac{\varphi^2_m}{D_{m+1}} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+2}} - \frac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+3}} \ldots\ldots \ldots\ldots - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}.$$

En posant

$$R'''_{m+1.n}=\begin{vmatrix} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1}-\varphi_{m+1} \end{vmatrix}$$

on voit que

$$h_{m.n}=-\varphi_m-\frac{\varphi^2_m\, R'_{m+2.n}}{R'_{m+1.n}}=-\varphi_m\frac{R'''_{m+1.n}}{R'_{m+1.n}}\;\ldots\ldots\;(6)$$

5. Nous regarderons maintenant φ_m, φ_n et Φ_{mn} comme des inconnues, dont nous tirerons la valeur des équations (4), (5) et (6).

Si l'on remarque que $R''_{m+1.n}$ contient implicitement φ_m (à savoir, dans $D_{m+1}=\delta_{m+1}-\varphi_{m+1}-\varphi_m$) et que de même $R'''_{m+1.n}$ contient φ_n, et $R'_{m+1.n}$ tant φ_m que φ_n, on reconnaît la nécessité de trouver pour ces expressions des formes dans lesquelles les inconnues entrent explicitement.

On a:

$$R''_{m+1.n}=\begin{vmatrix} \delta_n-\varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \delta_n-\varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & \varphi_{m\;1} & \delta_{m+1}-\varphi_{m+1} \end{vmatrix}-\varphi_m\, R''_{m+2.n}$$

En faisant alternativement la somme des lignes et des colonnes, le premier terme du dernier membre passe à la forme:

$$R_{m+1.n} = \left\{ \begin{array}{llll} \delta_n & \delta_{n-1}+\delta_n \ldots & \delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots\ldots+\delta_n & \delta_{m+1}+\delta_{m+2}\ldots\ldots+\delta_n \\ \varphi_{n-1} & \delta_{n-1} & \ldots\ldots\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_{n-1} & \delta_{m+1}+\delta_{m+2}\ldots+\delta_{n-1} \\ 0 & \varphi_{n-2} & \ldots\ldots\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_{n-2} & \delta_{m+1}+\delta_{m+2}\ldots+\delta_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots0 \quad \varphi_{m+2} & \delta_{m+2} & \delta_{m+1}+\delta_{m+2} \\ 0 & 0\ldots0 \quad 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} \end{array} \right\}$$

de sorte qu'on obtient:

$$R''_{m+1.n} = R_{m+1.n} - \varphi_m R''_{m+2.n} \ldots\ldots (\alpha)$$

On trouve de même:

$$R'''_{m+1.n} = \left\{ \begin{array}{lllllll} D_n & \varphi_{n-1} & 0 \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} & \\ 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1}-\varphi_{m+1} & \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lllllll} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} & \\ 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1}-\varphi_{m+1} & \end{array} \right\} - \varphi_u R'''_{m+1.n-1}$$

ou

$$R'''_{m+1.n} = R_{m+1.n} - \varphi_n R'''_{m+1\,n-1} \ldots\ldots (\beta)$$

$$R'_{m+1.n}=\left|\begin{array}{cccccccc} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & & \varphi_{m+2} & & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & & 0 & & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{cccccccc} \delta_n-\varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & & \varphi_{m+2} & & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & & 0 & & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{array}\right|-\varphi_n R'_{m+1.n-1}=$$

$$=R_{m+1.n}-\varphi_m R''_{m+2.n}-\varphi_n(R'''_{m+1.n-1}-\varphi_m R'_{m+2.n-1})$$

ou

$$R'_{m+1.n}=R_{m+1.n}-\varphi_m R''_{m+2.n}-\varphi_n R'''_{m+1.n-1}+\varphi_m\varphi_n R'_{m+2.n-1}. \quad (\gamma)$$

Divisons maintenant (4) et (6) par (5); dans les équations obtenues, substituons les valeurs de $R'_{m+1.n}$ et $R'''_{m+1.n}$ de (α) et (β), puis résolvons les équations par rapport à φ_m et φ_n.

On a alors:

$$\varphi_m=\Phi_{m.n}\frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n}R''_{m+2.n}+(-1)^{n-m}k_{m.n}\varphi_{m+1}\varphi_{m+2}\cdots\varphi_{u-1}} \quad ..(7)$$

$$\varphi \;=\Phi_{m.n}\frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n}R'''_{m+1.n-1}-(-1)^{n-m}h_{m.n}\varphi_{m+1}\varphi_{m+2}\cdots\varphi_{n-1}} \quad ..(8)$$

6. Les quantités φ_m et φ_n sont maintenant exprimées en $\Phi_{m.n}$ et il n'y a plus qu'à trouver $\Phi_{m.n}$.

En substituant dans (5) d'abord la valeur de $R'_{m+1.n}$ de (γ), puis les valeurs de φ_m et φ_n de (7) et (8), on trouve:

$$\Phi^2_{m.n}(R_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'''_{m+1.n-1}) -$$
$$- (-1)^{n-m} \Phi_{m.n} R_{m+1.n} \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \cdots \varphi_{n-1} -$$
$$- h_{m.n} k_{m.n} \varphi^2_{m+1} \varphi^2_{m+2} \cdots \varphi^2_{n-1} = 0.$$

Dans l'expression

$$R_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'''_{m+1.n-1}$$

nous substituons

$$R''_{m+2.n} = R'_{m+2.n} + \varphi_n R'_{m+2.n-1}$$

$$R'''_{m+1.n-1} = R'_{m+1.n-1} + \varphi_m R'_{m+2.n-1}$$

$$R_{m+1.n} = R'_{m+1.n} + \varphi_m R''_{m+2.n} + \varphi_n R''_{m+1.n-1} - \varphi_m \varphi_n R'_{m+2.n-1} =$$
$$= R'_{m+1.n} + \varphi_m R'_{m+2.n} + \varphi_n R'_{m+1.n-1} + \varphi_m \varphi_n R'_{m+2.n-1}.$$

On obtient alors:

$$R_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R''_{m+2.n} R'''_{m+1.n-1} =$$
$$= R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1} \cdot \;\ldots\ldots \quad (\delta)$$

On a ensuite:

$$R'_{m+1.n} = D_{m+1} R'_{m+2.n} - \varphi^2_{m+1} R'_{m+3.n}$$

$$R'_{m+1.n-1} = D_{m+1} R'_{m+2.n-1} - \varphi^2_{m+1} R'_{m+3.n-1},$$

d'où il résulte

$$R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1} =$$
$$= \varphi^2_{m+1} (R'_{m+2.n} R'_{m+3.n-1} - R'_{m+3.n} R'_{m+2.n-1}).$$

En posant maintenant:

$$\lambda_{m+1.n-1} = R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1},$$

on a:

$$\lambda_{m+1.n-1} = \varphi^2_{m+1}\,\lambda_{m+2.n-1}$$

$$\lambda_{m+2.n-1} = \varphi^2_{m+2}\,\lambda_{m+3.n-1}$$

$$\lambda_{m+3.n-1} = \varphi^2_{m+3}\,\lambda_{m+4.n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n-3.n-1} = \varphi^2_{n-3}\,\lambda_{n-2.n-1}$$

$$\lambda_{n-2.n-1} = -\,\varphi^2_{n-2}\,\varphi^2_{n-1}$$ [1]).

On en déduit immédiatement:

$$R'_{m+1.n}R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n}R'_{m+1.n-1} = -\varphi^2_{m+1}\varphi^2_{m+2}\cdots\varphi^2_{n-1} \quad (\varepsilon)$$

Par l'introduction des expressions (δ) et (ε), l'équation ci-dessus passe à la forme:

$$\Phi^2_{m.n} + (-1)^{n-m}\Phi_{m.n}\frac{R_{m+1.n}}{\varphi_{m+1}\,\varphi_{m+2}\cdots\varphi_{n-1}} + h_{m.n}\,k_{m.n} = 0 \quad . \; . \quad (9)$$

7. Les équations (7), (8) et (9) peuvent prendre encore une forme plus élégante.

On a, en effet:

$$R''_{m+2.n} = \begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & 1 \end{vmatrix}$$

[1]) Cette équation s'obtient en calculant la valeur de:

$$\lambda_{n-2.n-1} = R'_{n-2.n}\,R'_{n-1.n-1} - R'_{n-1.n}\,R'_{n-2.n-1}.$$

En faisant la somme des lignes de ce déterminant, ainsi que celle des colonnes, on trouve:

$$R''_{m+2.n} = \begin{vmatrix} \delta_n & \delta_{n-1}+\delta_n \ldots\ldots & \delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_n & 1 \\ \varphi_{n-1} & \delta_{n-1} \ldots\ldots & \delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_{n-1} & 1 \\ 0 & \varphi_{n-2} \ldots\ldots & \delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_{n-2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots 0\ \varphi_{m+2} & \delta_{m+2} & 1 \\ 0 & 0\ldots 0\ \ 0 & \varphi_{m+1} & 1 \end{vmatrix}$$

De même, on a:

$$R'''_{m+1.n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} & & \\ 0 & 0 & 0\ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} & -\varphi_{m+1} & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots & 1 & 1 \\ \varphi_{n-1} & \delta_{n-1} \ldots\ldots & \delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_{n-1} & \delta_{m+1}+\delta_{m+2}\ldots+\delta_n \\ 0 & \varphi_{n-2} \ldots\ldots & \delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ldots+\delta_{n-2} & \delta_{m+1}+\delta_{m+2}\ldots+\delta_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots 0\ \varphi_{m+2} & \delta_{m+2} & \delta_{m+1}+\delta_{m+2} \\ 0 & 0\ldots 0\ \ 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} \end{vmatrix}$$

Si nous posons alors:

$$\delta_r + \delta_{r+1} \ldots\ldots + d_s = \sum_r^s \delta,$$

les expressions ci-dessus se transforment en:

$$R''_{m+2.n} = \frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{m+1}\delta} + \frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{m+2}\delta} \cdots\cdots + \frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta}$$

$$R'''_{m+1.n-1} = \frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{n}^{n}\delta} + \frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{n-1}^{n}\delta} \cdots\cdots + \frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta},$$

tandis qu'on a:

$$(-1)^{n-m}\, \varphi_{m+1}\, \varphi_{m+2} \cdots\cdots \varphi_{n-1} = -\frac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta}.$$

Les équations (7), (8) et (9) peuvent maintenant être écrites ainsi :

$$\varphi_m = \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n}\left(\dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta} + \dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{m+2}\delta} .. + \dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n-1}\delta}\right) + (\Phi_{m.n} - k_{m.n}) \dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta}} \quad (10)$$

$$\varphi_n = \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n}\left(\dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{n}^{n}\delta} + \dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{n-1}^{n}\delta} .. + \dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta}\right) + (\Phi_{m.n} + h_{m.n}) \dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta}} \quad (11)$$

$$\Phi^2_{m.n} - \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\dfrac{dR_{m+1.n}}{d\sum\limits_{m+1}^{n}\delta}} + h_{m.n}\, k_{m.n} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Les équations (10), (11) et (12) donnent trois relations entre les $2\,(n - m + 1)$ éléments φ_m, $\varphi_{m+1} \cdots \varphi_n$, δ_{m+1}, $\delta_{m+2} \cdots \delta_n$, $h_{m.n}$, $k_{m.n}$, $\Phi_{m.n}$. On peut donc imposer encore $2\,(n - m) + 1$ conditions à un système de lentilles.

8. Comme exemple, appliquons les formules trouvées à un système de 4 lentilles; on a alors:

$$R = \begin{Bmatrix} \delta_4 & \delta_3 + \delta_4 & \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\ \varphi_3 & \delta_3 & \delta_2 + \delta_3 \\ 0 & \varphi_2 & \delta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\,R}{d\,\overset{2}{\underset{2}{\Sigma}}\,\delta} = \delta_3\,\delta_4 - (\delta_3 + \delta_4)\,\varphi_3, \quad \frac{d\,R}{d\,\overset{3}{\underset{2}{\Sigma}}\,\delta} = -\,\delta_4\,\varphi_2,$$

$$\frac{d\,R}{d\,\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\,\delta} = \varphi_2\varphi_3,$$

$$\frac{d\,R}{d\,\overset{4}{\underset{4}{\Sigma}}\,\delta} = \delta_2\,\delta_3 - (\delta_2 + \delta_3)\,\varphi_2, \quad \frac{d\,R}{d\,\overset{4}{\underset{3}{\Sigma}}\,\delta} = -\,\delta_2\,\varphi_3,$$

de sorte que les équations (10), (11) et (12) deviennent:

$$\varphi_1 = \Phi\frac{\delta_2\delta_3\delta_4 - (\delta_2+\delta_3)\delta_4\varphi_2 - \delta_2(\delta_3+\delta_4)\varphi_3 + (\delta_2+\delta_3+\delta_4)\varphi_2\varphi_3}{\Phi\{\delta_3\delta_4 - (\delta_3+\delta_4)\varphi_3 - \delta_4\varphi_2\} + (\Phi - k)\varphi_2\varphi_3}$$

$$\varphi_4 = \Phi\frac{\delta_2\delta_3\delta_4 - (\delta_2+\delta_3)\delta_4\varphi_2 - \delta_2(\delta_3+\delta_4)\varphi_3 + (\delta_2+\delta_3+\delta_4)\varphi_2\varphi_3}{\Phi\{\delta_2\delta_3 - (\delta_2+\delta_3)\varphi_2 - \delta_2\varphi_3\} + (\Phi + h)\varphi_2\varphi_3}$$

$$\Phi^2 - \Phi\frac{\delta_2\delta_3\delta_4 - (\delta_2+\delta_3)\delta_4\varphi_2 - \delta_2(\delta_3+\delta_4)\varphi_3 + (\delta_2+\delta_3+\delta_4)\varphi_2\varphi_3}{\varphi_2\,\varphi_3} + h\,k = 0.$$

Ces trois équations peuvent aussi être déduites des formules de Ferraris. Mais, quand on essaie d'y parvenir par les méthodes ordinaires, on est conduit à des calculs si longs que l'exécution en est presque impossible. Aussi, M. Ferraris lui-même s'est-il borné à traiter le cas d'un système de trois lentilles. L'application des équations (10), (11) et (12) ne présente, au contraire, même pour des systèmes d'un beaucoup plus grand nombre de lentilles, aucune difficulté.

BREDA, août 1882.

SUR LA ROTATION

ÉLECTROMAGNÉTIQUE DU PLAN DE POLARISATION,

PAR

W. C. L. VAN SCHAIK.

I.

Nature du mouvement lumineux.

On sait que les phénomènes optiques ont conduit à représenter le mouvement qui caractérise la nature de la lumière par des équations de la forme

$$\xi = c. \cos \frac{2 \pi t}{T}, \qquad \eta = c. \sin \frac{2 \pi t}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

où ξ et η désignent, à un endroit déterminé du rayon, les déplacements d'un point perpendiculairement à la direction de propagation (z), T la période correspondant à l'espèce de lumière qu'on considère, et t un temps variable.

Ces équations, qui définissent l'ondulation „transversale", laissent indécise le genre du mécanisme qui est en action sur le rayon lumineux. Différents modèles satisfont par leur mouvement à cette définition.

Représentons-nous, en premier lieu, une série de points matériels exécutant, perpendiculairement à la direction de propagation, des vibrations simples (Voir Pl. I, fig. 1). C'est là le

modèle ordinaire pour le mouvement lumineux; les points sont les particules de l'„éther", qui subissent les déplacements ξ et η par rapport à l'axe des z, et qui sont situées dans le même plan lorsque le rayon est polarisé rectilignement.

En second lieu, figurons-nous, dans le plan du dessin, une série de petites tiges, qui d'abord soient placées parallèlement l'une à côté de l'autre, mais qui ensuite basculent périodiquement autour de droites passant par leur milieu et perpendiculaires au plan du dessin. Si elles se meuvent ainsi successivement, de manière à occuper, à un certain moment, la position indiquée dans la fig. 2, elles peuvent servir de modèle pour le rayon à polarisation rectiligne, dont le mouvement est alors censé s'exécuter dans le plan du dessin (le plan des $y\,z$).

La même remarque s'applique à un troisième modèle de mouvement, représenté dans la fig. 3. Ici, ce sont de petits disques circulaires placés perpendiculairement, en leur centre, à l'axe des z, et qui, par exemple, basculent périodiquement autour de droites parallèles à l'axe des x, que nous supposerons toujours perpendiculaire au plan du dessin. Si, en outre, ces disques subissent aussi des mouvements de bascule autour de droites parallèles à l'axe des y, donc dans un plan perpendiculaire à celui du dessin, il est clair que ces deux mouvements différents ne pourront jamais se neutraliser ni se renforcer l'un l'autre. L'interférence ne peut produire un renforcement ou un affaiblissement que lorsque les axes autour desquels les mouvements de bascule s'exécutent ne sont pas perpendiculaires entre eux, tandis que la suppression complète du mouvement n'est possible que si les deux balancements, éprouvés par un même disque, ont lieu autour du même axe, c'est-à-dire, si les deux ondulations données sont „polarisées" dans le même plan.

Elevons maintenant, au centre de chacun des disques de ce modèle, une perpendiculaire à leur plan (voir fig. 4), et donnons à toutes ces perpendiculaires une longueur constante. Soit M l'extrémité d'une de ces droites, et soient ξ et η les coordonnées de ce point. Si alors les équations (1) sont appliquées

au point M, ce point définira par son mouvement les balancements de chacun des disques.

Un quatrième modèle peut être construit, par exemple, de la manière suivante. Imaginons que le milieu dans lequel le mouvement lumineux se propage exécute des rotations locales autour de droites parallèles à l'axe des y. Le sens et la vitesse de ces mouvements, que nous supposerons périodiques, peuvent être représentés par la direction et la longueur d'axes pris suivant les axes de rotation (axes de Poinsot). L'ordonnée η de l'extrémité M d'un tel axe a, en des points différents de la direction de propagation, des valeurs différentes, et elle varie avec la vitesse et le sens de la rotation. Ces rotations ne peuvent jamais être annulées ni diminuées par le concours d'autres rotations semblables s'accomplissant autour de droites parallèles à l'axe des x. Et, en pareil cas, l'extrémité M de l'axe de la rotation résultante détermine toujours par son mouvement ondulatoire le mouvement de rotation du milieu.

De cette façon, on pourrait construire encore une foule d'autres modèles, présentant tous un mécanisme qui par son mouvement satisferait aux phénomènes optiques. Même après les travaux de Young, d'Arago, de Fresnel, on n'est donc pas autorisé à choisir un de ces modèles de préférence aux autres.

Mais, dans tous ces exemples, le mouvement du mécanisme se laisse définir par un point M, dont le mouvement transversal, pour une lumière homogène, à un endroit déterminé du milieu, est donné par les équations ci-dessus (1).

Ces équations exigent d'ailleurs nécessairement qu'on ait

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = - a \xi \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 \eta}{d t^2} = - a \eta \quad . \; . \; . \; . \; (2),$$

a étant une constante.

Or ces formes indiquent que l'accélération éprouvée par M doit être proportionnelle au déplacement de ce point. Tel est aussi le caractère de l'accélération qui se manifeste dans les mouvements dus à l'élasticité. Que, d'après cela, on appelle le

mouvement lumineux un phénomène d'*élasticité*, ou qu'on lui refuse ce nom, toujours est-il que les équations en question doivent être satisfaites.

Ordinairement on dit que la lumière consiste en un mouvement de va-et-vient transversal de l'„éther", et on suppose une molécule d'éther placée au point *M* dans les modèles susdits. Si l'on veut concevoir, par exemple, la lumière comme produite par des mouvements de nature électrique, ces mouvements doivent toujours se laisser déterminer complètement par le mouvement du point *M*, et celui-ci est un mouvement transversal périodique.

On sait que la théorie, telle qu'elle a été développée dans ses détails par Fresnel, Neumann, Cauchy, conduit, en ce qui concerne les quantités de lumière polarisée réfléchie et réfractée, à certains résultats que l'expérience ne confirme pas. Cette inexactitude dans les conséquences théoriques ne peut toutefois provenir expressément de ce que ces mathématiciens ont conçu la lumière comme un phénomène d'*élasticité;* car, par ce mot, ils ont seulement traduit les équations ci-dessus mentionnées pour l'accélération, et, du mot même, rien ne peut être déduit.

L'inexactitude des résultats obtenus tient à la valeur relative qui, dans les développements, a été attribuée à cette „élasticité" de l'éther dans des milieux différents. Les formules de la théorie ont ainsi pris des formes particulières, qui ont conduit à ces résultats spéciaux.

La représentation courante du mouvement lumineux est caractérisée par la circonstance que, parmi les modèles satisfaisant aux conditions voulues, on en a choisi arbitrairement un, notre modèle N°. 1; en d'autres termes, avec une matière spéciale, l'éther lumineux, on a matérialisé le point mathématique *M*.

La nature de la lumière peut aussi consister en mouvements de bascule, comme dans modèles 2 et 3. Ce qui va et vient peut encore être un *état*, ainsi qu'on en voit un exemple dans la fig. 5, où nous avons représenté une série de ressorts spiraux, dont chacun à part montre déjà une ondulation: un état de compression maxima, une condensation au point *M*, parcourt

chaque ressort alternativement dans les deux sens. On peut également laisser indécise la question de savoir si par „éther lumineux" il faut entendre nne matière, ou bien un état d'une matière ou d'un corps. Ainsi, il est parfaitement loisible de mettre une „molécule d'éther" à la place du point *M*, sans rien affirmer d'ailleurs sur ce que cet éther peut être en lui-même.

Ce que c'est, proprement, qui exécute un mouvement de va-et-vient ou de bascule dans le rayon lumineux, nous l'ignorons; il est certain, toutefois, que la nature de ce mouvement nous est connue, en ce sens, qu'il est défini par le mouvement périodique et transversal, lui-même bien connu, qui a été assigné ci-dessus au point mathématique *M*. Mais la théorie ordinaire de la lumière n'a, en réalité, pas fait autre chose que paraphraser *ce dernier* mouvement dans des cas particuliers; tout ce qui a rapport à la *nature* de ce mouvement demeure donc intact et devra être admis sans réserve par toute théorie nouvelle qu'on voudra édifier au sujet de la lumière

On peut donc continuer à enseigner le mouvement d'un pareil point *M* („molécule d'éther"). Tout ce que Huygens a dit des ondes [1]), tout ce que plus tard les opticiens français ont déduit, comme conséquences nécessaires, du mouvement du point *M* (phénomènes de coloration par interférence et par polarisation, rotation du plan de polarisation, etc.) reste vrai et impérissable.

A l'égard des modifications que la trajectoire du point *M*, qu'elle soit elliptique, circulaire ou rectiligne, doit éprouver lors du passage d'un milieu dans un autre (lors de la réflexion et de la réfraction), on en est aussi réduit, dans l'optique ordinaire, à des hypothèses. Or, justement, ces modifications ont de l'importance au point de vue de l'intensité lumineuse [2]).

Si l'on suppose, dans ses calculs, que la lumière consiste en mouvements périodiques et transversaux de l'électricité, — sans spécifier, du reste, ce qu'est l'électricité, — les hypothèses

---

[1]) *Traité de la lumière*, Leyde, 1690, p. 17, 22, 33, 34, 59, 72.

[2]) Ici, par exemple, il y désaccord entre les physiciens.

particulières concernant la „force élastique" du point *M*, donc concernant les circonstances qui interviennent lors du passage d'un milieu dans un autre, peuvent aussi être dirigées et déterminées plus spécialement, par la connaissance, telle que l'expérience l'a fournie, du mouvement de l'électricité dans les conducteurs et dans les non-conducteurs.

Une théorie qui part de ce point de vue est, de sa nature, plus riche; elle a l'avantage d'embrasser sous un seul aspect deux groupes de phénomènes, les mouvements de l'éther et le mouvement de l'électricité, de sorte que ce que nous savons de l'un peut servir à éclaircir nos idées, à augmenter notre connaissance au sujet des autres.

Une pareille théorie, développée par Clerk Maxwell, n'est donc nullement en dehors de la théorie ondulatoire ordinaire, laquelle s'occupe uniquement du mouvement du point descripteur *M*. Aussi Maxwell dit-il: „Prof. Rankine has suggested opposite rotations of molecules about their axes, and I have suggested oppositely directed magnetizations and electromotive forces; but the adoption of either of these hypotheses would in no way alter the essential character of the undulatory theory". *Theory of Heat*, 1875, p. 236).

D'une part, on tâche aujourd'hui d'expliquer les phénomènes électriques par l'existence d'un seul fluide, qu'on identifie avec l'éther lumineux: c'est ce que fait, entre autres, M. Edlund. D'autre part, on met en avant notre connaissance des phénomènes des mouvements électriques, et on examine jusqu'à quel point les conséquences auxquelles on arrive en supposant ces mouvements périodiques se concilient avec ce qu'exige l'optique.

Ce sont surtout les travaux de Faraday et de M. William Thomson qui ont conduit à la seconde de ces théories. Maxwell, partant de la théorie de la polarisation diélectrique, calcula la vitesse avec laquelle des mouvements électriques périodiques devaient se propager dans un corps isolant, et il trouva ainsi, dans l'air, une vitesse semblable à celle de la lumière. Il reconnut, en même temps, que si les vibrations lumineuses étaient

considérées comme des mouvements vibratoires de l'électricité, il devait exister une certaine relation entre une constante électrique (la capacité inductive spécifique) et une grandeur optique, l'indice de réfraction. Or, d'une manière générale, l'exactitude de cette relation a été établie par la voie expérimentale.

Dès l'année 1862, ces résultats du calcul furent rendus publics (*Phil. Mag.*, t. XXIII). A l'origine, ils n'obtinrent pas un assentiment général. En 1865 (*Phil. Trans.*), Maxwell les présenta sous une autre forme, et un peu plus tard d'autres savants, tels que M. Helmholtz et M. Lorenz (de Copenhague) se rangèrent de son côté. En 1876, parut un important Mémoire de M. Grinwis sur l'absorption de la lumière d'après la théorie de Maxwell; en 1881, M. Rowland donna, au point de vue électromagnétique, une explication de l'action des aimants sur la lumière.

Parmi ceux qui, après Maxwell, ont le plus contribué à la théorie électromagnétique de la lumière, il faut nommer surtout M. Lorentz (de Leyde), qui, environ deux siècles après que Huyghens eut fondé le système ondulatoire par sa théorie de la réflexion et de la réfraction [1]), s'occupa de ces mêmes phénomènes fondamentaux de l'optique et parvint, au point de vue nouveau, à des résultats satisfaisants en ce qui concerne les quantités réfléchies et réfractées de lumière polarisée [2]).

Suivant Maxwell, le mouvement lumineux consiste en courants périodiques transversaux (*displacement-currents*), qui s'étendent dans le milieu sur de très petits espaces coïncidant avec les conducteurs élémentaires que Faraday supposait exister dans les corps diélectriques. Ce mouvement reviendrait donc à un changement progressif, transversal et périodique, de la polarisation diélectrique.

Tâchons de nous former, pour un cas simple, quelque représentation claire de ce mouvement électrique.

Supposons, fig. 6, une petite tige conductrice, placée dans la direction de l'axe des y et ayant son milieu sur l'axe des z.

---

[1]) Ce fut en 1678. Le *Traité de la lumière* parut en 1790.

[2]) *Over de theorie der terugkaatsing en breking van het Licht*, Arnhem, 1875.

Un arc $A\,B\,C$ d'une matière non conductrice, aux extrémités duquel sont fixées deux boules métalliques P et Q, peut tourner autour d'un axe $A\,A'$ parallèle à l'axe des x, de sorte que ces boules décrivent alors un cercle autour de la tige conductrice. Supposons P chargé positivement, et Q négativement. Par influence, il y a donc au côté supérieur de la tige un excès d'électricité négative, au côté inférieur un excès d'électricité positive. Lorsqu'on fait tourner l'arc autour de son axe $A\,A'$, ces quantités d'électricité influencées se déplacent également; si l'arc reçoit une rotation continue, les deux électricités, dans la tige verticale, se meuvent continûment de bas en haut et de haut en bas, l'une à travers l'autre. Il se produit donc des courants périodiques dans cette tige métallique, qui représente pour nous l'un des conducteurs élémentaires que Faraday admet dans le corps diélectrique. Ce qui se passe dans cette tige, voilà ce que nous avons à considérer; quant à l'arc avec ses deux boules inductrices, ce n'était qu'un expédient destiné à fixer les idées, mais auquel nous n'attachons du reste aucune signification physique.

Soient p la quantité d'électricité positive dans la moitié supérieure de la tige et n la quantité d'électricité négative dans cette même moitié; si nous posons $p - n = q$, q a une valeur négative pour la position indiquée dans la figure, q est positif lorsque la boule P est en bas et Q en haut, et $q = 0$ lorsque l'arc se trouve dans le plan $x\,z$. Le mouvement peut être tel qu'on ait $q = c \sin \frac{2\pi t}{T}$, T désignant la durée totale d'une période (le temps de révolution de l'arc). Dans ce cas, ce mouvement est susceptible de représenter le *mouvement lumineux;* on peut alors supposer que beaucoup de ces conducteurs élémentaires sont placés à la suite l'un de l'autre dans le diélectrique et prennent successivement (par une cause qui nous est inconnue) un pareil état de polarisation, dépendant du temps de la manière sus-indiquée $\left(\sin \frac{2\pi t}{T}\right)$.

Si nous plaçons maintenant dans le plan $y z$, sur l'axe longitudinal de la tige, un certain point M, dont le lieu est déterminé de telle sorte que son ordonnée η soit égale à la quantité q et qu'on ait donc aussi

$$\eta = c \sin \frac{2 \pi t}{T},$$

le mouvement propre de ce point M définira en même temps le mouvement des fluides électriques dans la tige. La valeur de η indique en outre le degré de la „polarisation" électrique.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique aussi au cas où l'on admettrait un seul fluide électrique, par exemple, le positif. On aurait alors $n = 0$ et $\eta = q = p$.

Si nous étendons ces considérations aux mouvements vibratoires de l'éther, censés constituer l'essence de la lumière, nous retrouvons dans ce point M la „molécule d'éther" de la théorie ordinaire. Ce point M peut avoir, en général, les coordonnées ξ et η, qui sont alors proportionnelles aux composantes de la polarisation diélectrique (les quantités f et g du chapitre XX du *Treatise on Electr. and Magn.* de Maxwell); il représentera la particule électrique unique dans la théorie d'un seul fluide, telle que celle de M. Edlund.

Rappelons, encore une fois, que le modèle ci-dessus utilisé n'était qu'un moyen artificiel de venir en aide à l'intelligence; les variations successives de la polarisation diélectrique peuvent être décrites directement comme un phénomène d'influence électrique ou d'élasticité de l'éther.

La fig. 7 représente un modèle analogue; il diffère seulement du précédent en ce que la tige de la fig. 6 est remplacée par un anneau métallique, perpendiculaire à l'axe des z et ayant son centre sur cette droite. Ici encore, quand l'arc tourne, les deux électricités montent et descendent, et cela dans chacune des deux moitiés de l'anneau, à droite et à gauche de la verticale qui passe par son centre. Le phénomène résultant est de nouveau un mouvement équivalant à celui d'un rayon lumineux

à polarisation rectiligne où la „molécule d'éther" vibre dans la direction des y, de sorte que le mouvement est défini à l'aide d'un point M unique. On peut toutefois se figurer aussi les choses d'une autre manière, savoir, en admettant un pareil point M pour chacune des deux moitiés (droite et gauche) de l'anneau. Nommons ces deux points M_1 et M_2, et laissons-les se mouvoir sur l'anneau même, de façon, par exemple, que M_1 monte et descende sur la moitié gauche, M_2 sur la moitié droite. Pendant le mouvement supposé, ces deux points se trouvent toujours à la même hauteur dans les deux moitiés et sont, par exemple, en haut lorsque la boule influençante Q est elle-même en haut. Joignons maintenant le point M_1 au centre de l'anneau par une droite, que nous prolongeons en diamètre, et menons également un pareil diamètre par M_2 et l'axe des z; chacun de ces diamètres indique évidemment une direction de polarisation diélectrique; en outre, durant le mouvement de l'arc, ils tournent l'un à l'encontre de l'autre, et peuvent donc représenter les deux rayons circulaires opposés dont le résultat constitue, suivant Fresnel, le rayon polarisé rectilignement.

Nous ne voulons pas dire que les conducteurs élémentaires, dans le corps diélectrique, auront une forme semblable à celle de la figure, mais, si la lumière consiste en un mouvement périodique d'électricité, ce mouvement doit s'accorder, en ce qu'il a d'essentiel, avec celui qui est décrit dans les modèles en question.

Lorsque (fig. 8) l'axe de l'arc AA' est dirigé suivant l'axe des z, tandis que l'anneau reste placé comme dans la fig. 7, on reconnaît facilement que c'est là, quand l'arc tourne, le modèle pour un rayon unique à polarisation circulaire. Le degré de la polarisation électrique dans l'anneau est alors constant, mais sa direction varie et tourne autour de l'axe des z; il y a ici à définir une molécule d'éther qui se meut de telle sorte que $\xi^2 + \eta^2$ reste constant.

Maxwell a fait remarquer que lorsque les courants élémentaires (*displacement-currents*) qui, d'après lui, constituent la

lumière, se meuvent, par exemple, suivant la direction de l'axe des y, il se développe en même temps, suivant l'axe des x, des forces magnétiques, de nature telle que ces forces sont le plus grandes là où les déplacements électriques atteignent leurs maxima. L'une et l'autre grandeur sont représentées, dans le cas d'un rayon simple à polarisation rectiligne, par les sinusoïdes de la fig. 9 (fig. 66 de la 1ère édition du Traité de Maxwell, fig. 65 de la 2ième édit.) [1])

Ce résultat a été obtenu par l'application des équations connues

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

où u, v, w désignent les composantes du courant, α, β, γ celles des forces magnétiques. On peut déduire ces équations en exprimant le travail exécuté lorsqu'un point magnétique est promené autour du circuit électrique (*Treatise on Electr. and Magn.*, art. 491, 498, 607). Le calcul de ce travail, qui est proportionnel à l'intensité du courant, se fonde sur les faits observés avec des courants *fermés*, ou, du moins, avec des courants excités dans des conducteurs.

---

[1]) *Treatise on Electr. and Magn.*, art. 790 et 791. Si la sinusoïde dans le plan $x\,z$ représente graphiquement la force magnétique a dans cette direction, il est clair que la sinusoïde dans le plan $y\,z$ ne peut pas représenter la quantité G (moment électrocinétique) qui entre dans les équations de mouvement de Maxwell; car on a $a = -\frac{dG}{dz}$, et par conséquent a et $-\frac{dG}{dz}$ atteignent leurs maxima au même point. La sinusoïde qui représenterait G diffère d'un quart de longueur d'onde, en phase, de celle qui représente ici g ou η; aussi bien, en général, les équations en F et G définissent l'état existant un quart de longueur d'onde plus loin que celui exprimé par les équations ordinaires en ξ et η.

Si l'on se rappelle que tout courant produit autour de lui un champ magnétique, il est à prévoir que le résultat précité de Maxwell peut être obtenu plus directement, en admettant, comme lui, que la règle pour l'action des courants sur les aimants s'applique aussi aux courants qui sont supposés constituer l'essence de la lumière.

Considérons, à cet effet, la figure 10. La sinusoïde y montre le cours des déplacements des molécules d'éther, tels qu'ils ont été définis ci-dessus; ces déplacements sont toujours proportionnels à la polarisation diélectrique locale. La variation de cette dernière indique un courant électrique, et là où cette variation s'effectue le plus rapidement, où la vitesse de la molécule d'éther dans la direction du déplacement est le plus grande, là aussi les courants en question sont le plus intenses, l'intensité suivant l'axe des y étant $v = \frac{d\eta}{dt}$. Or, comme on le voit dans la figure, cette vitesse est maximum aux point E, E', E'' . . ., aux positions d'équilibre. Sa valeur est figurée par la longueur des flèches, lesquelles indiquent en outre la direction du mouvement et celle du courant de l'électricité positive, ainsi que cela résulte de la définition de la quantité η. A l'instant où existe l'état représenté dans la figure, on pourrait donc admettre des courants résultants aux points E, E', E'', un pareil courant étant, par exemple, dirigé vers le haut en E, vers le bas en E'.

Si l'on place maintenant en S' (le milieu entre E et E') un point magnétique boréal, ce point, d'après la règle d'Ampère, sera poussé en arrière du plan $y\,z$ par les courants qui passent près de E et E'; de même, un point magnétique boréal situé en S'' (milieu entre E' et E'') sera, sous l'influence des courants voisins de ces points, porté en avant, avec une force égale à celle qui agit en S'. Un point magnétique placé *près* de S' subira toutefois une action magnétique moindre que en S'; et sur un point placé en E ou en E', aucune force magnétique résultante ne pourra évidemment agir. Les forces magnétiques

en question agissent ici, comme on le voit, dans la direction des x; et, du raisonnement qu'on vient de faire, il suit qu'elles sont représentées graphiquement par une sinusoïde située dans le plan $x z$, et qui a ses points zéro en E, E', E'', c'est-à-dire, là où la sinusoïde qui représente le mouvement de l'éther dans le plan $y z$ traverse également l'axe des z. Nous retrouvons ainsi la fig. 9, où toutefois on a pris, pour direction positive de la force magnétique, la direction dans laquelle est mu un point magnétique austral.

Suivant Faraday, les lignes de force électrique, qui s'étendent entre des conducteurs, indiquent partout la direction de la polarisation diélectrique qui se produit dans les conducteurs élémentaires du corps diélectrique. On voit que cette théorie diélectrique trouve une confirmation dans la théorie de la lumière de Maxwell, en tant que celle-ci admet également certains petits espaces à l'intérieur desquels s'opère une polarisation électrique; cette dernière théorie s'occupe d'ailleurs spécialement des changements que cette polarisation éprouve dans un sens perpendiculaire à la direction suivant laquelle ces perturbations se propagent.

M. Helmholtz remarque du reste, dans son célèbre Mémoire „*Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität*". (Crelle, 1870), que l'analogie entre les mouvements de l'électricité et ceux de l'éther lumineux ne dépend pas de la forme particulière de l'hypothèse de Maxwell, mais peut aussi être déduite lorsqu'on admet les idées anciennes concernant l'action électrique à distance.

Il nous semble, toutefois, que la théorie électromagnétique de la lumière doit naturellement conduire, sous ce rapport, à concevoir la nature intime des non-conducteurs comme l'a conçue Maxwell. Car l'expérience d'interférence de Fresnel montre que, dans les divers points de l'écran, l'état dépend de la différence de distance de ces points aux sources lumineuses, et que, au moins sur l'écran même, il doit se produire une interférence de certains états. Il est vrai que cette expérience ne nous

apprend pas si l'interférence peut aussi avoir lieu en chemin, dans le milieu transparent. Mais un fait tel que celui-ci: que la rotation du plan de polarisation dans le quartz est proportionnelle à la longueur du trajet parcouru par la lumière dans la matière transparente, indique que la modification produite doit s'être répétée en route; sur le rayon lumineux lui-même doivent donc se faire incessamment des interférences d'états de sens différent, de sorte qu'à un moment donné chacun de ces états, aux différents points du rayon lumineux, est représenté par des vecteurs de valeurs différentes et de sens différent. Or, ce sont ces états qui, d'après la théorie électromagnétique de la lumière, consistent en une polarisation diélectrique du milieu.

Du reste, Faraday n'indique pas la cause en vertu de laquelle deux conducteurs élémentaires successifs se polarisent réciproquement, bien que ce phénomène supposé doive justement servir à expliquer l'influence entre deux conducteurs de dimensions finies, tels que nous les observons. Ainsi, la théorie diélectrique de Faraday laisse encore place pour une hypothèse concernant une action immédiate à distance, entre des masses électriques voisines l'une de l'autre; et il est possible qu'en formulant convenablement cette action on exprimera, à son aide, le principe fondamental de la théorie électromagnétique de la lumière.

II.

La rotation électromagnétique.

Le phénomène dont nous allons nous occuper a été représenté pour la première fois par Sir William Thomson, d'une manière si complète, que le fondement de la théorie mécanique est par là tout indiqué.

Dans les *Proceedings of the Royal Soc.* de juin 1856 et dans le *Phil. Mag.* de 1857, p. 200, ce grand physicien développe certaines „illustrations dynamiques", qui peuvent donner une idée de ce qui se passe par rapport au mouvement lumineux dans une matière active ou dans une matière placée sous l'influence magnétique. C'est dans ce Mémoire que se trouve le passage qui a conduit Maxwell à sa théorie et que nous citerons plus loin.

Tâchons d'abord de décrire le phénomène aussi complètement que possible, en regardant, — ce qu'on peut continuer à faire, d'après ce qui a été dit plus haut, — la lumière comme une ondulation transversale de particules d'éther.

Tant qu'un rayon lumineux d'une durée de vibration déterminée reste polarisé „rectilignement", les particules d'éther, à un certain moment, sont placées sur une sinusoïde (fig. 1). La direction du rayon est toujours supposée coïncider avec celle de l'axe des z.

Le magnétisme vient-il à agir sur la matière transparente, de façon que cette force ait une composante suivant l'axe des z, le plan de polarisation, et par conséquent aussi le plan de vibration, est „tourné", c'est-à-dire, tordu en *surface hélicoïdale.* Les directions de vibration des molécules d'éther sont alors situées suivant les génératrices de cette surface, lesquelles sont parallèles au plan $x y$ et passent par les positions originelles des molécules d'éther.

Pour avoir une image de l'état à un moment donné, il faut

porter sur ces génératrices, à partir de l'axe de l'hélice, des longueurs proportionnelles aux „déplacements" des particules d'éther, longueurs qu'on peut prendre, par conséquent, égales aux ordonnées de la sinusoïde précitée.

Il est facile de reconnaître que la projection de toutes ces particules parallèlement aux z, à un moment donné, fournit sur le plan $x y$ une courbe ayant une forme analogue à celle de la fig. 11, une figure en rosette, dont le nombre des feuilles est égal au nombre des demi-vibrations qui existent sur le rayon lumineux. Une fois la rotation du plan de polarisation accomplie, la surface hélicoïdale elle-même reste fixe, tandis que la projection en rosette, avec ses feuilles, tourne évidemment autour de son centre.

Le phénomène peut toutefois être décrit encore d'une autre manière, comme l'a montré Fresnel. Cette manière revient, on le sait, à concevoir le mouvement polarisé rectilignement comme le résultat de deux mouvements circulaires opposés.

Or la configuration, à un moment donné, d'un rayon lumineux polarisé circulairement est une hélice, sur laquelle les particules d'éther sont situées; en faisant tourner cette hélice autour de son axe, on obtient une représentation du mouvement lumineux lui-même, tandis que la vitesse de propagation de l'onde est représentée par le mouvement longitudinal apparent de l'hélice.

Prenons donc deux hélices P et Q géométriquement égales, sauf que l'une est l'image spéculaire de l'autre et qu'il y a par conséquent une hélice droite et une hélice gauche; ces hélices représenteront les deux rayons circulaires opposés. Si on les fait tourner en sens contraire, avec des vitesses égales et constantes, le rayon polarisé rectilignement peut être conçu comme le résultat de ces deux rotations.

On peut maintenant décrire la rotation du plan de polarisation en faisant tourner l'une des hélices P un peu plus rapidement que l'autre Q; par là on introduit pour P un *temps de vibration* différent (plus petit), ce qui change en même temps

la vitesse de propagation, tandis que la longueur d'onde (le pas de l'hélice) reste le même. C'est ainsi, par exemple, que le phénomène est représenté par Maxwell [1]).

Mais le concours de deux mouvements circulaires uniformes, qui s'exécutent avec des rayons égaux en sens opposé, ne peut donner lieu à un mouvement rectiligne que si les deux vitesses sont *égales;* lorsqu'elles sont différentes, le point parcourt une ligne courbe analogue à celle qui est représentée fig. 11, une sorte d'hypotrochoïde, courbe qui, en général, ne rentre pas en elle-même.

Cette courbe et la ligne droite en question se laissent construire, par exemple, de la manière suivante. Un point A (fig. 16) décrit un cercle d'un rayon $AO = a$ autour d'un point fixe O. Simultanément, un point B décrit un cercle autour de A, avec un rayon égal, $BA = a$, et en sens opposé. Lorsque les deux vitesses angulaires, comptées par rapport à une direction fixe, sont égales, le point B décrit une droite d'une longueur $= 4a$. Lorsque les vitesses ne sont pas exactement les mêmes, le point B parcourt l'hypotrochoïde susdite (fig. 11).

L'instrument représenté dans les fig. 15 et 16 réalise ce principe. Sur un support C est établie une poulie fixe p; par le centre de celle-ci passe un axe MO, qu'on fait tourner au moyen d'une manivelle et auquel est adapté un levier ON. L'extrémité de ce levier est traversée par un axe A, qui porte d'un côté une poulie q, et de l'autre côté un levier AB, muni d'une pointe B. La longueur AB est prise égale à la distance des axes A et MO. Si maintenant le diamètre de la poulie fixe p est égal à *deux* fois le diamètre de la poulie q, et si une corde s passe, suivant *une même* direction, dans la gorge de ces deux poulies, il est aisé de voir que la rotation de B autour de A sera *opposée* à celle de A autour de O, et que toutes les deux auront lieu, relativement à une direction constante, avec une vitesse angulaire *égale.* La trajectoire de B est alors rectiligne. Mais si l'on prend pour q une poulie un peu plus petite ou plus

---

[1]) *Treatise on Electr. and Magn.*, art. 814.

grande, de sorte que les diamètres ne soient plus exactement dans le rapport de 2 à 1, le point B décrira l'hypotrochoïde. Cet instrument peut donc servir à illustrer l'hypothèse de Fresnel; et l'amplitude $4a$ du mouvement résultant, laquelle est égale à deux fois l'amplitude d'un des mouvements circulaires, rend bien compte de l'accroissement d'intensité lumineuse qui résulte de la combinaison des deux rayons circulaires de sens opposé et d'intensité égale.

Si la description qui vient d'être donnée de la rotation du plan de polarisation est exacte, il faut qu'en chaque point du rayon lumineux, composé de ces deux rayons circulaires, les particules d'éther parcourent de semblables hypotrochoïdes. Nous devons donc nous attendre alors, non seulement à ce que la lumière ne reste pas polarisée tout à fait rectilignement, mais, en outre, à ce que le plan qu'on pourrait appeler ici „plan de polarisation" *continue à tourner sans interruption*, puisque la particule s'engage chaque fois sur une autre feuille de la courbe.

L'expérience montre toutefois que le plan de polarisation, une fois „tourné" (c'est-à-dire, une fois tordu en surface hélicoïdale) *demeure stationnaire* comme tel; et nous n'avons pas non plus le droit d'admettre que la lumière polarisée rectilignement ne reste pas polarisée rectilignement.

Si donc, d'après ce qui précède, nous sommes obligés d'admettre que lorsque la modification magnétique de la lumière est accomplie, la durée de vibration doit être la même dans chacun des deux rayons polarisés circulairement, nous devrons chercher la cause de la différence entre la vitesse de propagation des deux rayons circulaires (différence qui a été reconnue directement par M. H. Becquerel et par M. Cornu) dans une différence de *longueur d'onde*. La description du phénomène, telle que l'a présentée Maxwell, devra donc être abandonnée.

Au lieu de l'hélice P de tout à l'heure, prenons-en donc une autre P', qui ait par exemple un pas un peu plus court, de manière à représenter un rayon d'une longueur d'onde plus

petite, mais qui soit, du reste, égale à P. Si l'on fait tourner P' avec une vitesse *égale* et opposée à celle qui anime Q, le mouvement résultant de P' et Q reproduit une rotation du plan de polarisation. Pour chaque particule, ce mouvement résultant est maintenant rectiligne, et dans leur situation ces trajectoires présentent successivement la différence exigée. Ici nous avons, en passant de P à P', conservé la même durée de vibration, mais nous avons introduit une autre longueur d'onde, ce qui a changé la vitesse de propagation. Pour répondre complètement à la réalité, il n'y a plus qu'à remplacer Q par une autre hélice semblable Q', ayant le pas plus grand de la même quantité dont le pas de P' a été supposé plus petit que celui de P [1]). C'est ainsi que doit être conçu le phénomène de la rotation.

Tout ce que fait le magnétisme consiste à *changer la configuration* du rayon lumineux et à maintenir ce changement, par sa coopération avec les „forces élastiques" excitées dans le mouvement de la lumière.

L'étude dynamique du problème conduit à compléter les équations du mouvement de la lumière par l'addition d'un terme indiquant que l'accélération *suivant une certaine direction* a acquis une *autre valeur* qu'elle n'avait avant l'action du magnétisme. Pour un rayon de longueur élémentaire, ce changement de l'accélération sera proportionnel à la force qui, en vertu de l'influence magnétique, agit sur la particule d'éther. Désignons cette force, qui finalement maintient le changement de la configuration du rayon lumineux, par M; soient, en outre, E la force élastique résultant du déplacement par rapport à la position d'équilibre, et f l'accélération totale dans cette direction. On a alors, sans l'intervention du magnétisme,

$$f = E,$$

[1]) Ceci, conformément aux recherches expérimentales de M. Cornu (*Comptes rendus*, 1881).

et avec cette intervention,

$$f = E + c M \ldots\ldots (4)$$

où c sera proportionnel à l'intensité du champ magnétique.

C'est là le type général des équations différentielles du mouvement lumineux sous l'influence magnétique. Les équations de C. Neumann et de Maxwell, par exemple, diffèrent seulement par la forme qu'elles attribuent à la force M. Celles de Neumann ont la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= A \frac{d^2 \xi}{d z^2} + m \frac{d \eta}{d t} \\ \frac{d^2 \eta}{d t^2} &= A \frac{d^2 \eta}{d z^2} - m \frac{d \xi}{d t} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

celles de Maxwell, la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= A \frac{d^2 \xi}{d z^2} + m \frac{d^3 \eta}{d z^2 \, d t} \\ \frac{d^2 \eta}{d t^2} &= A \frac{d^2 \eta}{d z^2} - m \frac{d^3 \xi}{d z^2 \, d t} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6).$$

Dans le mouvement lumineux circulaire, les particules doivent, pendant que s'opère le changement de la configuration du rayon, tomber sur une hélice, d'un pas plus petit ou plus grand, parce que la longueur d'onde doit se modifier, de sorte qu'en même temps changent alors les distances angulaires des particules.

Ce changement lui-même doit donc s'accompagner d'un changement de la vitesse sur le cercle (par conséquent aussi, temporairement, de la durée de révolution), tandis que plus tard, lorsque la longueur d'onde est suffisamment modifiée, cette vitesse *reprend sa valeur antérieure*, ainsi que nous l'avons vu plus haut. Cela prouve que la force M, qui change la configuration, doit finalement être équilibrée par une force née de ce changement. En effet, l'intensité lumineuse est restée la même, et le rayon du cercle parcouru n'a donc pas varié non

plus. Or, lorqu'un point se meut d'un mouvement uniforme sur un cercle, l'accélération centripète résultante dépend uniquement de la vitesse et du rayon; ici, cette accélération centripète reprend donc sa valeur primitive lorsque tel est le cas pour la vitesse elle-même.

Mais cette force qui, naissant au cours du changement de configuration du rayon lumineux, finit par tenir en équilibre la force M, est évidemment dirigée normalement au cercle parcouru [1]); par conséquent, la force M doit alors également être normale à ce cercle.

Il a été remarqué, plus haut, que si la configuration du rayon lumineux n'éprouvait pas de changement, mais que la durée de vibration devînt autre, la molécule d'éther qui doit participer aux deux mouvements circulaires opposés n'aurait pas un mouvement rectiligne, mais parcourrait une hypotrochoïde. Comme en réalité toutefois la configuration du rayon subit une altération, à la suite de laquelle apparaissent justement les forces qui en fin de compte font équilibre à l'influence magnétique (M), une telle hypotrochoïde sera la trajectoire d'une molécule placée sous l'influence magnétique et qui n'aurait pas à s'accommoder à la direction de la vibration des molécules qui précèdent ou qui suivent. Pendant que s'opère le changement de configuration du rayon lumineux, les molécules doivent aussi parcourir de pareilles trajectoires, dont les feuilles successives deviennent alors de plus en plus étroites.

Lorsqu'un point vibrant se meut ainsi sur une courbe de ce genre, on peut dire qu'il est soumis, d'une part, à l'influence d'une force radiale attractive, proportionnelle à la distance au

---

[1]) Si l'on considère trois particules a, b, c, situées à la suite l'une de l'autre sur l'hélice, de telle sorte que les distances $a\,b$ et $b\,c$ soient égales, la résultante des forces exercées par a et c sur la particule intermédiaire b est dirigée suivant le rayon de courbure en b, rayon qui pour l'hélice a la même direction que le rayon, en ce même point, du cylindre sur lequel l'hélice est construite. Le changement que produit dans cette résultante l'altération du pas de l'hélice a aussi cette même direction.

centre, et d'autre part à l'influence d'une force normale à la direction du mouvement, force qui atteint sa valeur maximum dans la position d'équilibre.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considérer la construction de cette courbe, telle qu'elle a été élucidée ci-dessus par la fig. 16, et telle qu'on l'obtient à l'aide de l'instrument représenté dans les fig. 15 et 16. Tant que le mouvement résultant du point B est rectiligne, les deux mouvements composants circulaires s'exécutent avec des vitesses angulaires *égales*, comptées à partir d'une direction fixe. Or, lorsqu'un point possède un mouvement circulaire uniforme, la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui est dirigée, comme on sait, vers le centre: c'est la force „centripète". Le mouvement résultant du point B peut donc aussi être décrit au moyen des accélérations centripètes que les deux points (A et B) possèdent par rapport aux centres (O et A) des cercles. Considérons à cet effet la fig. 16, et les deux points A et B dans les positions A' et B'.

Pour ce qui regarde l'une des composantes du mouvement de B, savoir la rotation autour de A, l'accélération centripète, dirigée vers A, sera, par exemple, $= K$. Si l'autre composante, savoir la rotation autour de O, existait *seule*, de façon que la tige $A B$ se mût parallèlement à elle-même, B posséderait une accélération centripète $= K'$, qui devrait être parallèle à $A O$ (ici $A' O$), c'est-à-dire, dirigée vers le centre du cercle que le point B parcourrait dans ce cas. Dans la réalité, B (ou B') éprouve donc l'action de la résultante de K et K'. Lorsque les deux mouvements composants se font avec des vitesses *égales*, on a $K' = K$; le parallélogramme des forces est alors un rhombe; la résultante R tombe dans la direction $Y Y'$ du mouvement. En outre, la similitude des triangles montre que la grandeur de la force R est toujours proportionnelle au déplacement $O B$ (ici $O B'$), de sorte que B possède un mouvement pendulaire simple.

Donne-t-on, au contraire, des vitesses inégales aux deux composantes du mouvement, en sorte que le point décrive la courbe

susdite, alors les valeurs des forces changent également. Si l'une des vitesses est augmentée autant que l'autre est diminuée, et si ces changements sont petits, l'une des forces, K par exemple, croîtra de la même quantité dont l'autre, K', décroît [1]). Prenons donc (voir fig. 16, au point B'') la force K un peu plus grande, égale à F, et la force K' juste d'*autant* plus petite, égale à F'. Nous obtenons alors une résultante R' qui n'est plus située dans la direction $Y\,Y'$. La composante de R' suivant cette direction sera toutefois *égale* à la résultante R des forces égales K et K' considérées ci-dessus, ainsi qu'il ressort de la figure, où tout est bien défini et où $F - K = K' - F'$. Mais il y a ici, en plus, une composante normale X, qui manifestement sera *le plus grande* lorsque B passera par le point O. Elle est d'ailleurs proportionnelle au cosinus du temps, si la force R est proportionnelle au sinus de cette grandeur. Une pareille force, normale à la direction du mouvement, agit dans le cas en question, par suite de l'influence magnétique, sur la molécule d'éther, et fait tourner le plan de vibration [2]).

---

[1]) Ainsi qu'il résulte immédiatement de la différentiation de la formule $K = \frac{4\,\pi^2\,a}{T^2}$. Dans le phénomène qui nous occupe, la différence des vitesses en question est, sans aucun doute, particulièrement petite; lorsque la rotation électromagnétique du plan de polarisation est forte, elle ne s'élève pourtant, pour chaque longueur d'onde, qu'à une couple de secondes, de sorte que les feuilles de l'hypotrochoïde dont il s'agit seront extrêmement étroites. Comme, d'après les observations de M. Cornu, la longueur d'onde d'un des deux rayons circulaires se trouve finalement réduite autant que celle de l'autre se trouve augmentée (lorsque la modification magnétique de la lumière est devenue constante), — nous aurons à considérer aussi des changements *égaux* et opposés des vitesses.

[2]) La courbe en question est, par exemple, la trajectoire d'une lentille de pendule contenant un gyroscope en rotation rapide (Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, art. 74). Les forces qui, par suite du changement de direction de l'axe du gyroscope, se développent dans le pendule, sont perpendiculaires à la direction de l'oscillation, et elles atteignent leur plus grande valeur là où la direction de l'axe change le plus fortement, par conséquent, lorsque le pendule passe par la position verticale. Une autre

Une fois le plan de polarisation tordu, sur toute l'étendue du rayon lumineux, en surface hélicoïdale, la trajectoire de chaque point est rectiligne; la force *M* est alors tenue constamment en équilibre par la force apparue lors du changement de configuration du rayon. De ce qui a été dit tout à l'heure, il suit que cette force *M* est partout normale à la direction du mouvement et proportionnelle à la vitesse de la molécule d'éther. Elle est indiquée dans la fig. 12.

La circonstance que le magnétisme développe une force qui finalement doit être perpendiculaire à la direction du mouvement lumineux, avait déjà été reconnue par Verdet, ainsi qu'en témoigne la remarque suivante, à laquelle nous ne souscrivons du reste pas entièrement:

„Puisque les ondes planes à vibrations circulaires sont les seules qui puissent se propager librement dans un milieu transparent soumis à l'influence magnétique, on peut regarder comme évident que la force qui agit par suite de cette influence, sur une molécule d'éther en vibration, est constamment perpendiculaire à la direction de sa vitesse. Une telle force, en effet, ne peut qu'accroître ou diminuer la vitesse de propagation des ondes circulaires, sans en modifier la forme, tandis qu'elle doit

---

expérience, pouvant servir d'éclaircissement, est la suivante. Lorsqu'un poids, tenu suspendu à un fil, est mis en oscillation sous l'action de la pesanteur, on peut, au moyen d'un mouvement convenable de la main, faire en sorte que le point oscillant suive une trajectoire à peu près semblable à celle représentée dans la fig. 11. Un observateur reconnaît alors que la personne qui exécute l'expérience fait constamment, par le mouvement de la main (en tenant le cordon plus ou moins obliquement), agir perpendiculairement au plan d'oscillation une composante de la pesanteur, qui imprime une déviation à ce plan. Cette composante est le plus grande au moment où le point passe par la position d'équilibre. L'expérimentateur peut difficilement observer lui-même ce qui se passe, parce que son attention serait trop détournée de l'exécution de l'expérience. La direction du mouvement d'oscillation change ici continûment, à peu près comme chez le pendule conique.

altérer immédiatement toute vibration rectiligne ou elliptique" [1]).

Puisque les deux mouvements lumineux circulaires opposés, qui se propagent dans la même direction, sont modifiés en sens contraire, de sorte que chez l'une des hélices le pas est agrandi, chez l'autre diminué, il s'ensuit que la force éveillée dans ces modifications a, pour chacun des deux cas, un sens opposé (Voir la note p. 89). Par conséquent la force M, qui est tenue en équilibre par la force susdite, doit également différer de signe pour les deux espèces de mouvement. Cela indique que le mouvement lumineux lui-même contribue à développer la force M.

Le remarquable passage de M. William Thomson, auquel il a été fait allusion plus haut, que nous avons eu constamment en vue dans ce qui précède, et qui conduit presque nécessairement à une certaine conception au sujet de la nature du magnétisme, est le suivant:

„The magnetic influence on light, discovered by Faraday, depends on the direction of motion of moving particles. For instance, in a medium possessing it, particles in a straight line parallel to the lines of magnetic force, displaced to a helix round this line as axis, and then projected tangentially with such velocities as to describe circles, will have different velocities according as their motions are round in one direction (the same as the nominal direction of the galvanic current in the magnetizing coil), or in the contrary direction. But the elastic reaction of the medium must be the same for the same displacements, whatever be the velocities and directions of the particles; that is to say, the forces which are balanced by centrifugal force of the circular motions are equal, while the luminiferous motions are unequal. The absolute circular motions being therefore either equal or such as to transmit equal centrifugal forces to the

---

[1]) *Ann. de Chim. et de Phys.*, (3), t. LXIX, p. 462.

On peut remarquer que ce qui a été dit ci-dessus de la direction et de la valeur de la force M doit s'appliquer aussi à la force qui modifie le mouvement lumineux dans le cristal de roche et dans les liquides actifs.

particles initially considered, it follows that the luminiferous motions are only components of the whole motion, and that a less luminiferous component in one direction, compounded with a motion existing in the medium when transmitting no light, gives an equal resultant to that of a greater luminiferous motion in the contrary direction compounded with the same non-luminous motion".

Nous allons tâcher maintenant de comprendre le phénomène de la rotation magnétique du plan de polarisation au point de vue de la théorie électromagnétique de la lumière.

L'explication développée par Maxwell [1]) a ceci de caractéristique, qu'elle repose sur des changements transversaux de la force magnétique produite par l'électro-aimant. Cette force est supposée parallèle à la direction de propagation de la lumière (parallèle à l'axe des z), cas dans lequel, comme on sait, le phénomène a le plus d'intensité. Si les composantes de la force magnétique sont, en général, α, β, γ, on a donc, à l'origine, α et $\beta = 0$.

Maxwell introduit ensuite des quantités $d\alpha$ et $d\beta$, que le *mouvement lumineux fait naître* de la force magnétique donnée, en modifiant le mouvement rotatoire qui, d'après l'auteur, constitue l'essence du magnétisme.

Un rapport mécanique s'établit ainsi entre les deux mouvements, et par là est expliquée l'influence du magnétisme sur la lumière.

Mais le mouvement lumineux, par suite des déplacements relatifs des molécules d'éther, détermine aussi certaines rotations dans le milieu, rotations qui, pour un rayon polarisé rectilignement, sont le plus fortes aux sommets de la sinusoïde de la fig. 1, où elles s'opèrent dans le plan du dessin. Et si des mouvements rotatoires du milieu peuvent constituer l'essence de la force magnétique, comme Maxwell le suppose, on est déjà

[1]) *Phil. Mag.*, t. XXIII. — *Treatise on Electr. and Magn.*, Chap. XXI.

conduit à penser que le mouvement lumineux implique des forces magnétiques, dont l'allure est représentée, fig. 9, par la sinusoïde située dans le plan xz, ainsi qu'il a été dit plus haut (p. 82).

Il est à présumer, d'après cela, que cette théorie de la rotation magnétique du plan de polarisation peut aussi être construite d'une autre manière, dans laquelle on n'énoncerait aucune hypothèse déterminée concernant la nature du magnétisme, tandis que, d'autre part, on supposerait (conformément à la théorie électromagnétique de la lumière) que le mouvement lumineux fait apparaître des forces magnétiques, qui peuvent se combiner avec le magnétisme provenant de l'électro-aimant.

Ce mode de représentation, qui se concilie parfaitement avec le calcul de Maxwell, est peut-être plus simple que l'autre. Nous essaierons de le développer ici, après avoir précisé un peu l'état des corps qui sont placés dans un champ magnétique.

La force magnétique détermine en général, dans des milieux différents, deux états opposés l'un à l'autre, le magnétisme et le diamagnétisme. Ces deux états s'accordent en ceci, qu'ils manifestent une certaine action extérieure et sont caractérisés par la rotation imprimée au plan de polarisation, rotation qui est ordinairement de signe contraire suivant que le corps est magnétique ou diamagnétique. Ces états se propagent à travers le milieu suivant les lignes de force de Faraday, auxquelles on peut alors attribuer un signe différent selon l'espèce de l'état lui-même. Les lignes de force peuvent être regardées comme composées de parties élémentaires de nature magnétique, qui sont assimilables à de petites aiguilles aimantées [1]), et qui, sous l'influence des composantes magnétiques transversales du mouvement lumineux (voir p. 82), acquerront certains moments

[1]) Suivant l'hypothèse de Maxwell, ces éléments magnétiques consistent en „*vortices*", dont les axes de rotation coïncident partout avec la direction des lignes de force magnétique, tandis que la force magnétique elle-même peut être expliquée par les forces qui naissent de cette rotation.

de rotation et tendront à tourner, comme le fait une aiguille soumise à l'action d'un autre aimant ou d'un courant.

Laissons maintenant la lumière se propager suivant l'axe des z, que nous supposons être en même temps la direction de l'axe de l'électro-aimant; et considérons, comme dans la fig. 10, un rayon polarisé rectilignement, le mouvement de l'éther s'opérant dans le plan $y\,z$.

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, les forces magnétiques de ce mouvement lumineux sont le plus grandes aux points S, S', S'', où les déplacements dans le plan $y\,z$ atteignent également leur maximum, et, pour les différentes demi-ondes, ces forces sont alternativement dirigées dans le sens des x positifs et négatifs, comme le montre la fig. 9. Dans la fig. 13, où l'axe des x est placé dans le plan du dessin, nous les avons représentées par la sinusoïde $A\,E\,B\,E'$.

Sous l'influence de ces forces, il se développe, dans les parties élémentaires de la ligne de force, des couples, qui tendent à faire tourner ces éléments, à l'instar de petites aiguilles aimantées, dans le plan $x\,z$, par conséquent autour de droites parallèles à l'axe des y. Les moments de ces couples sont proportionnels à l'intensité des forces magnétiques du mouvement lumineux; ils sont donc le plus grands aux points S, S', S'', et ils sont de sens différent suivant le signe de ces forces.

Si les éléments magnétiques pouvaient librement obéir à ces couples, ils prendraient des directions telles que celles des petits traits marqués, dans la fig. 13, sur l'axe des z. Mais alors leurs extrémités (pôles) ne seraient plus situées directement les unes derrière les autres; l'attraction mutuelle de ces pôles aurait toutefois pour effet de les rapprocher autant que possible. Par suite, jointe aux rotations dans le plan $x\,z$, cette force produirait nécessairement un déplacement des éléments magnétiques, de telle sorte que ceux-ci s'aligneraient, comme le montre la courbe $G\,S\,H\,S'$ dans la fig. 14, suivant une sinusoïde, dont les sommets seraient situés aux points E, E', E''.

Le résultat est donc que les forces attractives qui agissent

entre les parties de la ligne de force, combinées avec les couples en question, donnent lieu au développement de *forces* parallèles à l'axe des x et ayant, aux différents points de la ligne de force, une valeur et un signe différents. Elles sont évidemment le plus grandes aux points E, E', E'', nulles aux points S, S', S'', et ont une allure sinusoïdale.

Ces forces latérales acquièrent une signification spéciale pour le mouvement lumineux lorsqu'on admet l'hypothèse d'un fluide électrique unique; la lumière, qui se propage dans le milieu où s'étendent les lignes de force magnétique, consiste alors en une vibration transversale de ce fluide [1]); et celui-ci, possédant partout un mouvement ondulatoire polarisé, subit en même temps l'action des forces qui agissent sur les lignes de force magnétique.

Les forces en question déterminent, d'après ce qui a été remarqué plus haut (p. 92) un mouvement sur une trajectoire analogue à celle qui est représentée fig. 11, où la direction de la vibration (et celle du „plan de polarisation") changent continuellement, jusqu'à ce que ces forces elles-mêmes soient tenues en équilibre par les réactions qui résultent du changement de configuration du rayon lumineux. Le plan de polarisation est alors „tourné", comme on dit; la trajectoire de chaque molécule diffère en position de celle de la molécule précédente, de sorte

[1]) En fait, une pareille hypothèse se rencontre dans toute théorie mécanique. C'est ainsi que, dans la théorie de la rotation de Maxwell, la lumière consiste en un mouvement périodique déterminé d'un milieu de ce genre (*Treatise on Electr. and Magn.*, art. 823, 824), mouvement dont la vitesse est mise en rapport, d'une manière mécanique, avec le mouvement des *vortices* qui doivent expliquer le magnétisme. M. Lommel admet que la résistance mécanique, qu'une molécule éprouve de tous les côtés par suite de la présence de son enveloppe d'éther, prend pour des directions différentes des valeurs différentes, lorsqu'un courant électrique circule autour de cette molécule (*Pogg. Ann.*, 1881); ce qu'on ne peut se représenter mécaniquement, à moins d'admettre que cet éther reçoive une vitesse d'une matière déterminée, qui possède ici un mouvement de rotation.

que l'accélération suivant une certaine direction a aussi une autre valeur que précédemment.

On reconnaît aisément que le phénomène sera proportionnel à l'intensité du magnétisme, ainsi que l'exige la loi de Verdet; il suffit de remarquer que l'attraction mutuelle des éléments magnétiques de la ligne de force, attraction qui entre comme facteur dans le phénomène, est d'autant plus grande que le magnétisme donné est plus intense. Le moment du couple résultant qui agit sur un élément magnétique ne sera toutefois pas dépendant de l'intensité du magnétisme; car, plus les éléments de la ligne de force sont intenses, plus aussi augmente le moment du couple produit par le magnétisme transversal du mouvement lumineux, et dans la même mesure est accru le moment rotatoire dû au magnétisme; le moment rotatoire résultant est donc indépendant de l'intensité magnétique des susdits éléments, de même que cela est le cas pour l'aiguille d'une boussole des tangentes. La rotation du plan de polarisation sera d'ailleurs indépendante de l'intensité de la lumière: plus la lumière est intense, plus intenses sont les forces magnétiques transversales; mais, en même temps, par suite du déplacement plus considérable, les courants de déplacement, qui doivent être tournés, sont également plus intenses. Le pendule ci-dessus décrit (p. 92, note) a ici une plus grande amplitude, et dans la même mesure est agrandie la force perpendiculaire au plan d'oscillation; la rotation reste la même.

Lorsqu'un rayon lumineux traverse le champ magnétique dans un sens *opposé*, les forces latérales ont, pour un même point, changé de signe; mais cela est alors aussi le cas, en ce point, pour la direction du mouvement de l'éther. Il suit de là que le sens *absolu* de la rotation magnétique du plan de polarisation est indépendant de la direction (sens) du rayon lumineux, de sorte que cette rotation a pour l'œil un sens différent, suivant que l'observateur se trouve à l'extrémité sud ou nord de l'aimant.

Des considérations qui précèdent, il ressort que les pressions latérales éprouvées par le fluide perpendiculairement au plan de vibration primitif sont le plus grandes aux points E, E', E'' des fig. 13 et 14, où elles agissent suivant la direction des x [1]). Ces forces, nées du mouvement lumineux, sont donc le plus grandes là où les courants primitivement donnés $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$ dans la direction des y sont le plus intenses; tandis qu'elles sont nulles aux points S, S', S'', où ces courants s'annulent.

En admettant donc que la force élastique, qui se développe localement dans la direction des x, soit proportionnelle à l'intensité de ces courants dirigés parallèlemement aux y, on a

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = Const. \times \frac{d\eta}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = C\frac{d^3\xi}{dz^2\,dt},$$

pour la partie de l'accélération suivant la direction des y, correspondant à la force qui s'est développée dans la direction des x.

Dans le cas ordinaire, on a

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = A\frac{d^2\eta}{dz^2},$$

quand on se borne à un seul des termes de Cauchy; dans le cas présent, pour le phénomène magnético-optique, nous avons

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = A\frac{d^2\eta}{dz^2} - C\frac{d^3\xi}{dz^2\,dt},$$

où C est proportionnel au magnétisme donné.

---

[1]) A savoir, lorsque, sur une petite longueur du rayon, la direction de la vibration primitive est prise pour celle des y. En cas de forte rotation, cette direction ne change que d'une couple de secondes sur la longueur d'une onde; or, le changement de la direction du mouvement, occasionné par un si faible changement dans la direction de la force perpendiculaire à ce mouvement, est ici évidemment une quantité d'ordre supérieur.

On peut donc arriver ainsi aux deux équations de mouvement

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}&=A\frac{d^2\xi}{dz^2}+C\frac{d^3\eta}{dz^2dt}\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}&=A\frac{d^2\eta}{dz^2}-C\frac{d^3\xi}{dz^2dt}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7),$$

d'où résulte, comme on sait [1]), une formule pour la dispersion électromagnétique:

$$\varrho=C\frac{n^2}{\lambda^2}\left(n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\ldots\ldots(8),$$

formule qui est bien celle de Maxwell.

Si l'on veut expliquer d'une manière physique la rotation magnétique du plan de polarisation, ce qui nous paraît le plus simple est d'en chercher la cause dans ce que la lumière et la force magnétique donnée ont de commun. Or, après que Maxwell a signalé les composantes magnétiques du mouvement lu-

[1]) *Voir* Verdet, *Ann. de Chim. et de Phys.* (3), t. LXIX.

La théorie de Maxwell, qui a encore trouvé un grand appui dans les calculs de M. Rowland, ne répond pas suffisamment, comme l'a montré Verdet, à toutes les observations. Mais il serait possible d'indiquer dans cette théorie (qui repose sur l'hypothèse des *vortices*) un fondement pour l'introduction de coefficients différentiels supérieurs dans les équations (7), de sorte que celles-ci prendraient la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=A\frac{d^2\xi}{dz^2}+C\left(\frac{d^3\eta}{dz^2dt}+C'\frac{d^5\eta}{dz^2dt^3}\right)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=A\frac{d^2\eta}{dz^2}-C\left(\frac{d^3\xi}{dz^2dt}+C'\frac{d^5\xi}{dz^2dt^3}\right)$$

et conduiraient, pour la rotation, à une formule à deux constantes:

$$\varrho=n^2\left(n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\left(\frac{a}{\lambda^2}+\frac{b}{\lambda^4}\right),$$

où a et b doivent être déterminées par l'expérience. Cette formule satisfait bien aux observations, ainsi que je l'ai fait voir dans mon Mémoire: *De electromagnetische dispersie der polarisatie-vlakken van het Licht*, Bréda, 1882, § 14.

mineux, nous pouvons dire que cette partie commune est constituée par le magnétisme.

Rappelons ici ce que Faraday écrivait au sujet de sa découverte: „I believe that, in the experiments I describe in the paper, light has been magnetically affected, i. e. that that which is magnetic in the forces of matter has been affected and in turn has affected that which is truly magnetic in the force of light".

NOTE.

Dans le *Phil. Mag.* de 1881, M. Rowland a donné une théorie de la rotation électromagnétique, dont le point de départ est emprunté au phénomène découvert par M. Hall. Il suppose que les courants électriques périodiques, qui suivant la théorie de Maxwell constituent le fondement de la lumière, sont tournés, autour des lignes de force magnétique, de la même manière que les courants galvaniques le sont dans le phénomène de Hall. De cette manière, il obtient pour la rotation électromagnétique une formule identique à celle de Maxwell. Ce résultat a une grande importance; car, si la théorie de Maxwell est exacte, il est rendu très probable par la théorie de M. Rowland que la rotation magnétique et le phénomène de Hall sont réellement identiques.

Une seule remarque de M. Rowlaud ne nous semble pas évidente, à savoir, que les forces magnétiques a et b, développées par le mouvement lumineux, devraient être négligées dans cette théorie *à raison* de leur petitesse. Elles ne doivent effectivement pas être prises en considération, mais pour un autre motif.

Du moment que nous supposons que le rayon polarisé recti-

lignement suit l'axe des z, et que l'axe de l'électro-aimant a également cette direction, il n'y a plus, par cela même, que des „courants de déplacement" suivant les axes des x et des y, c'est-à-dire, des courants que M. Rowland désigne par a' et b'. C'est à ces courants que doit être appliqué le phénomène de Hall. Ils donnent bien lieu à des forces magnétiques b et a, mais *celles-ci* ne peuvent *par elles-mêmes* faire tourner ces courants. Si tel était le cas, il faudrait que dans tout rayon polarisé rectilignement, même quand il n'est soumis à aucune influence magnétique, le mouvement lumineux fût modifié de la manière en question par les forces magnétiques que lui-même développe; or, c'est ce qui n'arrive pas.

Les courants de déplacement se trouvent, vis-à-vis des forces magnétiques *qu'ils produisent*, dans une tout autre relation que le courant électrique dans le phénomène de Hall vis-à-vis de la force magnétique *donnée* (non produite par ce courant).

Il en résulte que, lorsqu'on veut expliquer la rotation du plan de polarisation *par la substitution du phénomène* de Hall, on ne doit tenir compte que de la force magnétique *donnée* (produite par l'aimant), qui ici est $= c_1$. Par suite, les termes $b_1 c'$ et $c' a_1$ disparaissent, et le calcul de M. Rowland reste parfaitement exact [1]).

Cette théorie est de nature physique, tout comme celle que nous avons proposée plus haut. Pour la rotation du plan de polarisation on substitue ici un phénomène qui lui-même a besoin d'une explication mécanique. Mais, de cela justement, il ressort que, si la formule de Maxwell repose sur une base exacte, le phénomène magnético-optique et celui de Hall découlent de la même cause. Tel est l'important résultat obtenu par M. Rowland.

---

[1]) La remarque que c' est $= 0$ ne suffirait pas, *a priori*, pour faire évanouir les termes $a_1 c'$ et $b_1 c'$; car, si le phénomène de Hall devait s'appliquer aux „courants de déplacement", en ce sens que ceux-ci fussent tournés par les composantes magnétiques auxquelles ils donnent lieu, des composantes *longitudinales* (c') du mouvement lumineux *prendraient naissance.*

Le phénomène de Hall, toutefois, et l'action magnétique connue des courants, invoquée par nous, peuvent très bien avoir un fondement commun; M. Rowland avait même prévu que, dans les conditions étudiées par M. Hall, une action *devait* se produire. Il s'ensuit directement qu'on peut, à titre égal, employer l'un ou l'autre phénomène dans la théorie de la rotation du plan de polarisation.

Ces deux phénomènes eux-mêmes se laisseront d'ailleurs expliquer mécaniquement, par la combinaison d'action du champ magnétique provenant de l'aimant et de celui que détermine le courant. Il y a alors encore à poser une hypothèse concernant la nature mécanique du magnétisme en général, ainsi que M. Thomson et Maxwell l'ont fait dans la théorie de la rotation magnétique du plan de polarisation.

UTRECHT, 1882.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES,

PAR
W. KAPTEIJN.

Les remarques qui vont suivre se rapportent les unes aux équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre, les autres à celles d'un ordre quelconque. Les premières, qui sont réunies dans le premier paragraphe, ont pour but de trouver des équations qui, par le changement de la variable indépendante ou par certains changements de la variable dépendante, puissent être transformées en équations à coefficients constants; les dernières, mentionnées au second paragraphe, servent à faire connaître quelques propriétés des intégrales de certaines classes d'équations différentielles.

§ 1. L'équation différentielle:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - (r_1 + r_2) \frac{d y}{d x} + r_1 r_2 y = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

où r_1 et r_2 représentent des valeurs constantes, a pour intégrale générale:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

Or, si P et Q représentent deux fonctions de x, il sera parfois possible, au moyen d'nn changement convenable de la variable indépendante ou dépendante, de ramener l'équation

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

à la forme (1); nous allons voir dans quels cas cela a lieu.

a. Détermination de la condition à laquelle toutes les équations de la forme (3) doivent satisfaire pour qu'il soit possible de les réduire à la forme (1) par une substitution

$$x = \varphi(t),$$

φ étant un signe de fonction.

La substitution $x = \varphi(t)$ transforme (3) en:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{d^2 t}{dx^2} + P \frac{dt}{dx}\right) \frac{dy}{dt} + Q y = 0.$$

Les conditions pour que cette équation soit identique à

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (r_1 + r_2) \frac{dy}{dt} + r_1 r_2 y = 0$$

sont:

$$\frac{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}{1} = - \frac{\frac{d^2 t}{dx^2} + P \frac{dt}{dx}}{r_1 + r_2} = \frac{Q}{r_1 r_2}.$$

Ces deux équations étant écrites ainsi:

$$r_1 r_2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = Q \text{ et } \frac{d^2 t}{dx^2} + P \frac{dt}{dx} + (r_1 + r_2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0, \ldots (4)$$

l'élimination de t donne:

$$\frac{2 P Q + \frac{dQ}{dx}}{Q^{3/2}} = - \frac{2(r_1 + r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} = Const. = c. \ldots (5)$$

Les coefficients P et Q de toutes les équations différentielles

de la forme (3) qui admettent une pareille réduction doivent donc satisfaire à la condition (5).

Réciproquement, lorsque dans une équation différentielle de la forme (3) cette condition est remplie, on trouve la formule de substitution nécessaire au moyen d'une des équations (4). Il suit de là que l'équation différentielle donnée peut être intégrée de la manière suivante.

La valeur de c est connue: on a donc *une* relation entre les quantités r_1 et r_2, savoir:

$$-\frac{2(r_1+r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}}=c \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

En admettant entre ces quantités encore une autre relation, qui ne soit pas en contradiction avec la dernière équation, on pourra résoudre ces deux relations par rapport à r_1 et r_2. Ensuite, on cherchera la valeur de t au moyen d'une des équations (4), par exemple la seconde; on obtiendra ainsi:

$$t=\int\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{r_1 r_2}}\,dx=f(x) \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Cette valeur de t, à laquelle il ne faut pas ajouter de constante arbitraire, étant substituée, de même que les valeurs trouvées r_1 et r_2, dans

$$y=C_1 e^{r_1 t}+C_2 e^{r_2 t},$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée.

Un cas particulier se présente lorsque la constante c est trouvée égale à -4; on a alors, comme le montre l'équation (6), $r_1=r_2$. Il est évident que l'intégrale générale devient dans ce cas:

$$y=(C_1+C_2 t)\,e^{r_1 t},$$

où, ainsi qu'il résulte de (7), on a:

$$r_1 t=\int\sqrt{Q}\,dx$$

de sorte qu'on peut écrire

$$y = \left(C_1 + \frac{C_2}{r_1}\int \sqrt{Q}\,dx\right) e^{\int \sqrt{Q}\,dx}$$

ou

$$y = \left(C_1 + C_3\int \sqrt{Q}\,dx\right) e^{\int \sqrt{Q}\,dx},$$

C_3 étant une constante arbitraire, de même que C_2.

Comme exemples d'équations qui satisfont à la condition (5), je donnerai les suivantes:

$$(a + bx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + A(a + bx)\frac{dy}{dx} + By = 0,$$

$$(1 + ax^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} \pm b^2 y = 0 \text{ [1]},$$

$$(x^2 + a)\,x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x^2 + a)\,x\frac{dy}{dx} \pm b^2 y = 0 \text{ [1]},$$

dans lesquelles a, b, A, B représentent des constantes.

En appliquant à ces équations la méthode qui vient d'être exposée, on trouve pour c, dans les trois cas:

$$\frac{2(A - b)}{\sqrt{B}}, \quad 0, \quad 0.$$

Si maintenant la relation arbitraire, qu'on peut admettre entre r_1 et r_2, est choisie de telle sorte que le produit $r_1 r_2$ soit respectivement:

$$\frac{B}{b^2}, \quad \pm b^2, \quad \pm b^2,$$

les valeurs de r_1 et r_2 seront données par les équations:

$$r^2 + \frac{A - b}{b} r + \frac{B}{b^2} = 0, \quad r^2 \pm b^2 = 0, \quad r^2 \pm b^2 = 0.$$

[1]) Boole, *Differential Equations*, Third Edition, p. 428 et 429.

Pour t on trouve alors:

$$l\,(a + b\,x),\qquad \int\frac{d\,x}{\sqrt{1 + a\,x^2}},\qquad \int\frac{d\,x}{x\,\sqrt{x^2 + a}}.$$

Ces valeurs de r_1, r_2 et t étant ensuite substituées dans

$$y = C_1\,e^{r_1 t} + C_2\,e^{r_2 t},$$

on obtient les intégrales cherchées.

Il est à peine besoin faire observer que, dans le cas où r_1 et r_2 sont imaginaires, l'intégrale peut aussi être écrite avec *sin* et *cos*.

Les équations qui satisfont à la condition ci-dessus trouvée ont toutes, comme il résulte de ce qui précède, pour intégrale générale une forme telle que celle-ci:

$$y = C_1\,e^{r_1 f(x)} + C_2\,e^{r_2 f(x)}.$$

Si l'on avait demandé de déterminer toutes les équations différentielles

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + P\frac{d\,y}{d\,x} + Q\,y = 0$$

dont les intégrales générales possèdent la forme

$$y = C_1\,e^{r_1 f(x)} + C_2\,e^{r_2 f(x)},$$

où $f\,(x)$ représente une fontion indéterminée de x, on aurait évidemment trouvé la même condition entre les coefficients P et Q.

b. Détermination de la condition à laquelle toutes les équations de la forme (3) doivent satisfaire pour qu'il soit possible, par l'introduction d'une nouvelle variable dépendante, de les ramener à la forme:

$$\frac{d^2\,(y\,z)}{d\,x^2} - (r_1 + r_2)\,\frac{d\,(y\,z)}{d\,x} + r_1\,r_2\,y\,z = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

où z désigne une fonction indéterminée de x.

La dernière équation étant écrite de cette manière

$$z\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{2\frac{dz}{dx}-(r_1+r_2)z\right\}\frac{dy}{dx}+\left\{\frac{d^2z}{dx^2}-(r_1+r_2)\frac{dz}{dx}+r_1r_2z\right\}y=0,$$

on reconnaît immédiatement que (3) ne peut être identique à (8) que si l'on a:

$$\frac{z}{1}=\frac{2\frac{dz}{dx}-(r_1+r_2)z}{P}=\frac{\frac{d^2z}{dx^2}-(r_1+r_2)\frac{dz}{dx}+r_1\,r_2z}{Q}.$$

Si de ces deux équations, à savoir

$$Pz=2\frac{dz}{dx}-(r_1+r_2)z \quad \text{et} \quad Qz=\frac{d^2z}{dx^2}-(r_1+r_2)\frac{dz}{dx}+r_1r_2z, \;. \;(9)$$

on élimine la fonction z et ses coefficients différentiels, on trouve qu'entre P et Q doit exister la relation

$$2\frac{dP}{dx}+P^2-4Q=(r_1-r_2)^2=Const.=c \;\ldots\; (10)$$

Réciproquement, lorsque dans une équation différentielle de la forme (3), cette condition est remplie, on trouve la fonction z à l'aide d'une des équations (9). Il en résulte que l'équation donnée peut être intégrée de la manière suivante.

La valeur de c est donnée par (10); on connaît donc une relation entre les quantités r_1 et r_2, à savoir

$$(r_1-r_2)^2=c \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (11)$$

Entre ces quantités on admettra encore une seconde relation, qui ne soit pas en contradiction avec la première, et de ces deux relations on tirera les valeurs de r_1 et r_2.

Ensuite on détermine z par une des équations (9), par exemple la première, ce qui donne:

$$z=e^{\int\frac{P+r_1+r_2}{2}dx} \;\ldots\ldots\ldots\; (12)$$

Cette valeur de z, sans constante arbitraire, est enfin substituée, avec les valeurs trouvées pour r_1 et r_2, dans l'intégrale générale de (8), à savoir dans

$$y = \frac{1}{z}(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x});$$

on trouve ainsi

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} \left(C_1 e^{\frac{1}{2}(r_1 - r_2)x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}(r_1 - r_2)x} \right)$$

pour l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée.

Si la constante c est trouvée égale à zéro, on a $r_1 = r_2$. Cette égalité étant introduite dans (12), l'intégrale générale de (8), savoir

$$y = \frac{1}{z}(C_1 + C_2 x) e^{r_1 x},$$

devient

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} (C_1 + C_2 x).$$

Voici, par exemple, quelques équations dans lesquelles la condition (10) est remplie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2bx \frac{dy}{dx} + (a + b^2 x^2) y = 0 \text{ [1]},$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - a^2 x y = 0 \text{ [2]},$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2ax \frac{dy}{dx} + \{a(a-1) - b^2 x^2\} y = 0 \text{ [3]}.$$

En appliquant à ces équations la méthode ci-dessus, on trouve pour c:

$$4(b-a), \qquad 4a^2, \qquad 4b^2.$$

[1]) Schlömilch, *Höhere Analysis.* Zweite Auflage, p. 346.

[2]) Frenet, *Recueil d'Exercices.* Deuxième Edition, p. 233.

[3]) Schlömilch, *Höhere Analysis.* p. 346.

Si, dans chacun des trois cas, on dispose de la relation arbitraire entre r_1 et r_2 de telle sorte que

$$r_1 + r_2 = 0,$$

on obtient pour $r_1 = -r_2$:

$$\sqrt{b-a}, \qquad a, \qquad b.$$

On a ensuite, pour z:

$$e^{\frac{bx^2}{2}}, \qquad x, \qquad x^a,$$

ce qui donne pour les intégrales générales:

$$y = e^{-\frac{bx^2}{2}}\left(C_1 e^{x\sqrt{b-a}} + C_2 e^{-x\sqrt{b-a}}\right)$$

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}\right)$$

$$y = \frac{1}{x^a}\left(C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}\right).$$

Lorsqu'on détermine toutes les équations de la forme (3) dont les intégrales générales ont la forme

$$y = f(x)\left(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}\right),$$

où $f(x)$ représente une fonction indéterminée de x, on trouve naturellement, entre les coefficients P et Q, la même condition (10) que ci-dessus.

§ 2. *Soit α une racine primitive de l'équation*

$$\alpha^\mu = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots p_m(x)\,y = p(x) \quad \ldots \quad (2)$$

PROGRAMME

DE LA

Société Hollandaise des Sciences, à Harlem.

ANNÉE 1883.

La Société hollandaise des sciences a tenu, le 19 mai 1883, sa 131ième assemblée générale.

Le Directeur-Président, Jhr. G. F. VAN TETS, ouvre la séance en rendant hommage à la mémoire des membres que la Société a perdus depuis sa dernière réunion générale, à savoir, D. J. STEYN PARVÉ et R. P. A. DOZY, membres nationaux, A. BOUÉ, de Vienne, F. WÖHLER, de Göttingen, J. B. DAVIS, de Shelton. Il souhaite ensuite la bienvenue aux Directeurs nouvellement nommés: MM. le baron W. K. VAN DEDEM, de Hoorn, P. BIERENS DE HAAN, d'Amsterdam, N. G. CNOOP KOOPMANS, de Harlem, et Jhr. H. B VAN TETS, de Zutphen. Le Président communique à l'Assemblée que les Directeurs, outre des contributions aux frais des monuments à élever en l'honneur de feu les membres étrangers DARWIN et WÖHLER, ont accordé à M. H. TEN KATE JZN., qui fait un voyage scientifique dans l'Amérique du Nord et au Mexique, cinq cents florins pour l'acquisition d'objets destinés au Musée ethnographique de Leyde, et une somme égale à l'Association „Willem Barents", qui a expédié le navire portant ce même nom à la recherche du Varna, parti, l'an

dernier, pour les régions polaires. A l'invitation de la Société physique des Indes, les Directeurs ont aussi voté un subside de mille florins pour l'établissement, par M. le Dr. PH. SLUITER, d'une station zoologique près de Batavia, à la condition que la somme jugée nécessaire fût souscrite en totalité.

Le Secrétaire, M. E. H. VON BAUMHAUER, informe l'Assemblée qu'aucun Mémoire n'a été reçu, cette année, en réponse aux questions mises au concours. Du Recueil publié par la Société, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, ont paru les numéros 3, 4 et 5 du tome XVII et les numéros 1 et 2 du tome XVIII. Sous presse est un Mémoire présenté par M. C. E. DANIELS, d'Amsterdam: *Un cas de Leontiasis ossea cranii*, avec planches.

Après avoir discuté et arrêté quelques nouveaux sujets de prix, l'Assemblée, sur la proposition des Directeurs, nomme

membres nationaux:

MM. R. A. MEES, professeur à Groningue, et
Jhr. A. D. VAN RIEMSDIJK, président du Collège de la Monnaie, à Utrecht;

membres étrangers:

MM. J. H. DEBRAY, à Paris,
A. RUSSELL WALLACE, à Londres, et
A. W. EICHLER, à Berlin.

QUESTIONS MISES AU CONCOURS:

Jusqu'au 1er janvier 1884.

I. Bien que de nombreuses antiquités aient été retirées des *Terpen* de la Frise et de la province de Groningue, la composition et le mode de formation de ces tertres ne sont qu'imparfaitement connus. Beaucoup d'entre eux sont actuellement exploités et enlevés successivement, mais ces travaux n'ont pas encore été l'occasion de recherches scientifiques suffisantes.

La Société demande, en conséquence, une étude, faite sur

les lieux, de tout ce qui concerne la nature et la composition du sol des *terpen*, les restes végétaux et animaux qu'ils renferment, les différentes couches qu'on y distingue, etc. De cette étude on cherchera à déduire, autant que possible, comment ces éminences sont nées et comment elles ont été habitées. Un résumé critique de ce qui a été publié jusqu'ici au sujet de la composition des *terpen* pourra utilement servir d'introduction à l'exposé des résultats obtenus par l'auteur de l'étude demandée.

II. On demande:

a. Une appréciation théorique et, autant que possible, fondée sur l'expérience, de toutes les différentes espèces de boussoles marines et des moyens par lesquels on cherche à prévenir l'effet fâcheux des oscillations et trépidations du navire sur la facilité et la précision des lectures;

b. Une appréciation analogue de tous les moyens employés ou proposés pour déterminer et neutraliser, en tout ou en partie, l'influence que le fer du navire exerce sur la boussole.

III. Nos connaissances au sujet de la relation qui existe entre l'intensité de la lumière émise sous forme de rayons et l'angle d'émission n'ont pas fait, en ce qui concerne les surfaces réfléchissant la lumière par diffusion, de progrès marqué depuis Bouguer, tandis que, pour les surfaces émettant une lumière propre, ces connaissances reposent presque entièrement sur des recherches relatives à la chalenr rayonnante.

La Société demande donc de nouvelles séries d'observations sur l'intensité de la lumière émise dans différentes directions par ces deux sortes de surfaces, ainsi que l'établissement de la loi suivant laquelle cette intensité dépend de l'angle d'émission et de la nature de la surface lumineuse.

IV. Soumettre à une appréciation critique les différentes observations qui ont été faites sur le changement de réfrangibilité que la lumière éprouverait en conséquence d'un mouvement de la source lumineuse ou du milieu réfringent, et exposer les résultats qui peuvent être déduits de ces observations.

V. Etudier la structure des reins des Mammifères, spéciale-

ment en ce qui concerne le revêtement épithélial dans les différentes subdivisions des tubes rénaux.

VI. Faire des expériences exactes sur la condensation de différents gaz à la surface des corps solides, à des températures différentes.

VII. Il est très probable que beaucoup de phénomènes physiques et chimiques (évaporation, dissociation, décomposition mutuelle, etc.) trouvent leur explication dans le mouvement des particules d'un système autour d'un état d'équilibre.

On demande, à ce sujet, une étude théorique détaillée.

VIII. Donner une description, accompagnée de planches, du système nerveux périphérique de différents Poissons osseux.

IX. Communiquer de nouvelles recherches, avec figures à l'appui, sur l'histoire du développement de une ou plusieurs espèces de Lamellibranches.

X. On demande une contribution à la connaissance et à l'explication des phénomènes de la décharge électrique dans les gaz raréfiés.

Jusqu'au 1er janvier 1885.

I. Etablir nettement les titres de Huygens au sujet de la théorie de la lumière, en s'appuyant sur ses ouvrages et ses lettres et en les comparant avec les écrits de ses contemporains.

II. On demande un Guide pour la détermination des Cryptogames de la Flore néerlandaise.

III. Faire une étude comparative exacte de la formation des feuillets blastodermiques et de leur développement en corps embryonnaire chez au moins deux espèces d'oiseaux, appartenant à des ordres différents et couvés dans des conditions entièrement semblables.

IV. Scruter la valeur de la théorie des tourbillons (*vortices*) pour l'explication des phénomènes électriques.

V. Produire une monographie sur la Flore de la Guyane néerlandaise.

VI. Déterminer mathématiquenent les coefficients d'induction et de potentiel d'un système donné de conducteurs électriques.

VII. Etablir, par des recherches microchimiques, les analogies et les différences entre les matières lithoïdes terrestres et celles qu'on trouve dans les météorites.

VIII. Malgré les nombreuses recherches auxquelles ont donné lieu les états allotropiques du soufre, il règne encore beaucoup d'incertitude à l'égard de la place qui doit être attribuée, parmi les états allotropiques, à quelques variétés de ce corps.

Cela est spécialement le cas pour le soufre mou qu'on obtient en chauffant l'élément à certaines températures, ou qui se sépare dans diverses réactions chimiques.

La Société demande une étude expérimentale, d'où l'on puisse conclure si le soufre mou obtenu de différentes manières doit être regardé comme un état allotropique particulier.

La Société recommande aux concurrents d'abréger autant que possible leurs mémoires, en omettant tout ce qui n'a pas un rapport direct avec la question proposée. Elle désire que la clarté soit unie à la concision, et que les propositions bien établies soient nettement distinguées de celles qui reposent sur des fondements moins solides.

Elle rappelle, en outre, qu'aucun mémoire écrit de la main de l'autenr ne sera admis au concours, et que même, une médaille eût-elle été adjugée, la remise n'en pourrait avoir lieu, si la main de l'auteur venait à être reconnue, entre-temps, dans le travail couronné.

Les plis cachetés des mémoires non couronnés seront détruits sans avoir été ouverts, à moins que le travail présenté ne soit qu'une copie d'ouvrages imprimés, auquel cas le nom de l'auteur sera divulgué.

Tout membre de la Société a le droit de prendre part au concours, à condition que son mémoire, ainsi que le pli, soient marqués de la lettre L.

Le prix offert pour uue réponse satisfaisante à chacune des questions proposées, consiste, au choix de l'auteur, en une *médaille d'or* frappée au coin ordinaire de la Société et portant le nom de l'auteur et le millésime, ou en une somme de *cent-cinquante florins;* une prime supplémentaire de *cent-cinquante florins* pourra être accordée si le mémoire en est jugé digne.

Le concurrent qui remportera le prix ne pourra faire imprimer le mémoire couronné, soit séparément, soit dans quelque autre ouvrage, sans en avoir obtenu l'autorisation expresse de la Société.

Les mémoires, écrits lisiblement, en *hollandais*, *français*, *latin*, *anglais*, *italien* ou *allemand* (mais non en caractères allemands), doivent être accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom de l'auteur, et envoyés franco au Secrétaire de la Société, le professeur E. H. von Baumhauer, à Harlem.

---

une équation différentielle linéaire dans laquelle $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots p_m(x)$, $p(x)$ *représentent des fonctions de* x *remplissant les conditions suivantes*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha p_1(\alpha x) = p_1(x) \\ \alpha^2 p_2(\alpha x) = p_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^m p_m(\alpha x) = p_m(x) \\ \alpha^m p(\alpha x) = p(x) \end{array}\right\} ; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

si alors une fonction $f(x)$ *de* x *satisfait à l'équation* (2), *les fonctions* $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{u-1} x)$ *satisferont également à cette équation.*

Cette proposition se démontre très simplement. En posant $x = \alpha z$, l'équation (2) devient:

$$\frac{d^m y}{dz^m} + \alpha p_1(\alpha z) \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \alpha^2 p_2(\alpha z) \frac{d^{m-2} y}{dz^{m-2}} + \ldots \alpha^m p_m(\alpha z) y = \alpha^m p(\alpha z),$$

ou, si les conditions (3) sont remplies:

$$\frac{d^m y}{d z^m} + p_1(z) \frac{d^{m-2} y}{d z^{m-2}} + p_2(z) \frac{d^{m-2} y}{d z^{m-2}} + \ldots p^m(z) y = p(z).$$

Il ressort de là que, si $y = f(x)$ satisfait à (2), cette équation sera satisfaite aussi par $y = f(z) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Lorsque dans une intégrale $f(x)$ on change x en $\frac{x}{\alpha}$, on obtient donc une nouvelle intégrale; si l'on répète cette opération, on voit que $f\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)$, $f\left(\frac{x}{\alpha^3}\right), \ldots f\left(\frac{x}{\alpha^{u-1}}\right)$ seront également des intégrales de (2); la proposition susdite est par là démontrée, puisque

$$f\left(\frac{x}{\alpha^i}\right) = f(\alpha^{u-i}),$$

i représentant un nombre entier.

Ainsi, quand les équations (3) sont satisfaites et qu'une intégrale $f(x)$ de (2) est donnée, on connaît immédiatement encore $\mu-1$ intégrales. Celles-ci, toutefois, ne sont pas toujours différentes de la première, et il est clair que, si l'une d'elles est égale à l'intégrale primitive, toutes les autres le seront également.

A l'aide de cette proposition, on peut souvent, d'une intégrale donnée, en déduire de plus générales. Il convient de distinguer alors deux cas, celui où le second membre de l'équation (2) est égal à zéro et celui où il ne l'est pas.

1. $p(x) = 0$.

Soit $f(x)$ une intégrale de l'équation (2), équation dans laquelle les conditions (3) sont remplies et dont le second membre est zéro; $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x)$ ... $f(\alpha^{\mu-1} x)$ sont alors également des intégrales de cette équation. Désignons ces μ intégrales, pour abréger, par y_1, y_2, . . y_μ; pour qu'elles ne soient pas liées par une équation linéaire

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_\mu y_\mu = 0,$$

où C_1, C_2 . . C_μ représentent certaines constantes, qui peuvent aussi être nulles, il doit être satisfait, comme on sait, à la condition que le déterminant suivant ne disparaisse pas :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{\mu-1} y_1}{d x^{\mu-1}}, & \ldots & \frac{d y_1}{d x}, & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{\mu-1} y_\mu}{d x^{\mu-1}}, & \ldots & \frac{d y_\mu}{d x}, & y_\mu \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta \neq 0.$$

Lorsque $f(x)$ est donné, on peut déterminer Δ; trouve-t-on $\Delta \neq 0$, alors

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_\mu y_\mu$$

est donc une intégrale plus générale de l'équation différentielle, puisque C_1, $C_2, \ldots C_\mu$ y ont maintenant la signification de constantes arbitraires.

Il est évident que cela ne peut être le cas que si l'on a $\mu \leqq m$. Prenons, à titre d'exemple, l'équation différentielle

$$\frac{d^m y}{d x^m} - \frac{1}{x^{2m}} y = 0 \text{ [1]},$$

à laquelle on sait qu'il est satisfait par

$$y_1 = x^{m-1} e^{-\frac{1}{x}} = f(x);$$

on trouve alors immédiatement encore $m-1$ autres intégrales, vu que la condition

$$\alpha^m p_m(\alpha x) = p_m(x) = -\frac{1}{x^{2m}}$$

est remplie, si l'on prend pour α une racine primitive de l'équation $\alpha^m = 1$.

Ces intégrales sont, quand on néglige des facteurs constants,

$$x^{m-1} e^{-\frac{\alpha}{x}}, x^{m-1} e^{-\frac{\alpha^2}{x}}, \ldots x^{m-1} e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}}.$$

Il en résulte l'intégrale générale

$$y = x^{m-1} \left\{ C_1 e^{-\frac{1}{x}} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{x}} + C_3 e^{-\frac{\alpha^2}{x}} + \ldots + C_\mu e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}} \right\},$$

car on peut démontrer que les intégrales ci-dessus ne sont pas liées entre elles par une relation linéaire.

---

[1]) Spitzer, *Studien* 1860. Vorwort, p. 8.

Comme ces μ intégrales possèdent toutes un même facteur x^{m-1}, il suffit de prouver que les fonctions

$$e^{-\frac{1}{x}}, e^{-\frac{\alpha}{x}}, e^{-\frac{\alpha^2}{x}} \dots e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}}$$

sont linéairement indépendantes. Or, si l'on substitue ces fonctions à $y_1\ y_2\ y_3 \dots y_\mu = y_m$ dans Δ, et qu'on désigne la valeur correspondante de ce déterminant par Δ', il est facile de voir que ces deux déterminants doivent dépendre l'un de l'autre. La remarque en a déjà été faite par M. Hesse, qui a montré (Crelle, 54, p. 249) que

$$\Delta = (x^{m-1})^m \Delta'.$$

M. Hesse donne en même temps une méthode pour le calcul de Δ', méthode qui, si l'on fait usage des relations employées par M. Christoffel (Crelle, 55, p. 298), revient à ce qui suit.

Représentons les fonctions

$$e^{-\frac{1}{x}}, e^{-\frac{\alpha}{x}}, e^{-\frac{\alpha^2}{x}}, \dots e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}}$$

respectivement par

$$f, f_1, f_2, \dots f_{m-1},$$

et soit en outre

$$f_{i,k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f i, k-1}{f k, k-1}\right),$$

où i et k désignent des nombres entiers et où l'on suppose

$$f_{i,-1} = f_i, f_{0,-1} = f;$$

on a alors

$$\Delta' = f^m \cdot f_{1,0}^{m-1} \cdot f_{2,1}^{m-2} \cdot f_{3,2}^{m-3} \dots f_{m-2,m-3}^2 \cdot f_{m-1,m-2}.$$

Observant que dans dans le cas en question on a

$$f_1 = f^\alpha f_2 = f^{\alpha^2} \dots f^{m-1} = f^{\alpha^{m-1}},$$

on trouve

$$f_{1,0}=(\alpha-1)\,f^{\alpha-2}\frac{df}{dx},$$

$$f_{2,1}=\alpha\,(\alpha^2-1)\,f^{\alpha^2-\alpha-1}\frac{df}{dx},$$

$$f_{3,2}=\alpha^2\,(\alpha^3-1)\,f^{\alpha^3-\alpha^2-1}\frac{df}{dx},$$

. . . .

$$f_{m-2,m-3}=\alpha^{m-3}\,(\alpha^{m-2}-1)f^{\alpha^{m-2}-\alpha^{m-3}-1}\frac{df}{dx},$$

$$f_{m-1,m-2}=\alpha^{m-2}\,(\alpha^{m-1}-1)f^{\alpha^{m-1}-\alpha^{m-2}-1}\frac{df}{dx},$$

d'où il suit, après réduction:

$$\Delta'=\alpha^{-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}}(\alpha-1)^{m-1}(\alpha^2-1)^{m-2}\ldots$$

$$\ldots(\alpha^{m-1}-1)^1 f^{-\frac{m(m-1)}{2}}\left(\frac{df}{dx}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Par la substitution de $f=e^{-\frac{1}{x}}$, il vient

$$\Delta'=\alpha^{-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}}(\alpha-1)^{m-1}(\alpha^2-1)^{m-2}\ldots(\alpha^{m-1}-1)x^{-m(m-1)}$$

et

$$\Delta=\alpha^{-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}}(\alpha-1)^{m-1}(\alpha^2-1)^{m-2}\ldots(\alpha^{m-1}-1),$$

d'où l'on peut conclure

$$\Delta \neq 0.$$

Lorsqu'on trouve $\Delta=0$, les μ intégrales dépendent l'une de l'autre, et il importe alors de pouvoir déterminer combien d'entre elles sont mutuellement indépendantes.

A cet effet, remarquons que lorsque entre μ fonctions il y a ν relations linéaires, ces relations peuvent toujours être écrites

de telle sorte que chacune d'elles contienne $\mu-\nu+1$ fonctions. Si une pareille relation existe, un déterminant de l'ordre $\mu-\nu+1$, formé de la même manière que précédemment de ces $\mu-\nu+1$ fonctions, sera nul. Les ν relations existant, ν déterminants de l'ordre $\mu-\nu+1$ seront donc égaux à zéro. Ceux-ci sont précisément les déterminants indépendants qu'on peut former en négligeant, dans le Δ formé à l'aide des μ fonctions, les $\nu-1$ premières colonnes et en réunissant, $\mu-\nu+1$ à $\mu-\nu+1$, les μ lignes restantes, chacune de $\mu+\nu+1$ éléments.

Inversement, si un déterminant formé comme ci-dessus est nul, il existe une relation linéaire entre les fonctions qui entrent dans ce déterminant. De ce qui vient d'être dit, suit donc cette règle:

Lorsque dans Δ tous les déterminants de l'ordre ν qui peuvent être formés des ν dernières colonnes en réunissant chaque fois ν lignes, sont nuls, il existe $\mu-\nu+1$ relations linéaires entre les μ fonctions $y_1, y_2, \ldots y_\mu$.

Si l'on sait, par exemple, que l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4}-\frac{2}{x}\frac{d^3 y}{dx^3}+\frac{7}{x^2}\frac{d^2 y}{dx^2}-\frac{15}{x^3}\frac{dy}{dx}+\frac{16}{x^4}y=0$$

est satisfaite par $x^2\, lg\, x$, les expressions

$$x^2\, lg\, \alpha x,\ x^2\, lg\, \alpha^2 x,\ x^2\, lg\, \alpha^3 x$$

seront également des intégrales de cette équation, puisque, pour $\alpha^4=1$, les conditions (3) sont remplies.

Pour le déterminant Δ on trouve dans ce cas:

$$\Delta = x^2 \left\{\begin{matrix} 1, & 2\, lg\, x+3, & 2\, lg\, x+1, & lg\, x \\ 1, & 2\, lg\, \alpha x+3, & 2\, lg\, \alpha x+1, & lg\, \alpha x \\ 1, & 2\, lg\, \alpha^2 x+3, & 2\, lg\, \alpha^2 x+1, & lg\, \alpha^2 x \\ 1, & 2\, lg\, \alpha^3 x+3, & 2\, lg\, \alpha^3 x+1, & lg\, \alpha^3 x \end{matrix}\right\}$$

Ici, tous les déterminants du 3e ordre qui peuvent être formés des 3 dernières colonnes sont nuls, et par conséquent il existe entre les quatre fonctions 2 relations linéaires.

Celles-ci sont

$$x^2 \lg x - 2x^2 \lg \alpha x + x^2 \lg \alpha^2 x = 0$$

et

$$x^2 \lg \alpha x - 2x^2 \lg \alpha^2 x + x^2 \lg \alpha^3 x = 0.$$

Deux de ces fonctions peuvent donc être exprimées linéairement au moyen des deux autres, et l'on obtient ainsi, à l'aide de l'intégrale donnée, l'intégrale plus générale:

$$C'_1 x^2 \lg x + C'_2 x^2 \lg \alpha x$$

ou, en posant

$$C'_1 + C'_2 = C_2, C'_2 \lg \alpha = C_1,$$

$$x^2 (C_1 + C_2 \lg x).$$

Il est clair que cette intégrale plus générale aurait pu être trouvée plus directement, et qu'on aurait aussi pu attribuer à μ d'autres valeurs que 4; c'est comme application de la méthode exposée plus haut que la marche suivie a été préférée.

2. $p(x) \neq 0$.

Soit $f(x)$ une intégrale de l'équation (2), équation dans laquelle les conditions (3) sont remplies et dont le second membre n'est pas zéro; $f(\alpha x), f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)$ sont alors également des intégrales de cette équation.

Si l'on pose

$$\frac{f(x) + f(\alpha x) + \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)}{\mu} = f_0(x)$$

et

$$f(x) - f_0(x) = F(x),$$

$f_0(x)$, fonction qui ne change pas lorsqu'on y remplace par αx, est une intégrale de l'équation (2), et $F(x), F(\alpha x), \ldots F(\alpha^{\mu-1} x)$ sont μ intégrales de l'équation dans laquelle (2) se transforme quand son second membre est remplacé par zéro. Si pour ces dernières intégrales on détermine de nouveau la fonction Δ, on peut en deduire combien d'entre elles sont dépendantes. Soit ν ce nombre; l'expression

$$f_0(x) + C_1 F(x) + C_2 F(\alpha x) + \ldots C_\nu F(\alpha^{\nu-1} x)$$

est donc alors une intégrale plus générale de l'équation (2).

Lorsqu'on renonce à la supposition qu'une intégrale particulière est donnée, le théorème ci-dessus énoncé conduit encore à cette importante conséquence:

Soit une équation (2) *satisfaisant aux conditions* (3), *et dont on sache qu'elle a une intégrale pouvant être développée suivant les puissances positives et négatives de x; si alors on a $p=0$, l'équation* (2) *possède une intégrale de la forme*

$$y = \Sigma A_{i\mu} x^{n-i\mu},$$

où le second membre représente une somme de termes obtenus en donnant à i différentes valeurs positives entières, et où n désigne un nombre entier; si, au contraire, on a $p \neq 0$, (2) *possède une intégrale de la forme*

$$y = \Sigma A_{n-r\mu} x^{r\mu},$$

où r désigne un nombre entier, et A, de même que dans la forme précédente, une constante.

Soit d'abord $p=0$; si alors

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots A_n + A_{n+1} x^{-1} + \ldots$$

est une intégrale de (2), $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x)$, $\ldots f(\alpha^{\mu-1} x)$ sont également des intégrales de cette équation. Celle-ci est donc satisfaite aussi par

$$\frac{1}{\mu}\{f(x)+\alpha^{\mu-n}f(\alpha x)+\alpha^{2(\mu-n)}f(\alpha^2 x)+\ldots\alpha^{(\mu-1)(\mu-n)}f(\alpha^{\mu-1}x)\}.$$

Substituant dans cette dernière expression les valeurs de $f(x)$, $f(\alpha x)$ etc., et faisant attention aux propriétés des racines de l'équation $\alpha^\mu = 1$, on trouve immédiatement

$$\Sigma A_{i\mu} x^{n-i\mu}.$$

Soit, en second lieu, $p \neq 0$; si alors, de nouveau,

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots A_n + A_{n+1} x^{-1} + \ldots$$

est une intégrale de (2), cette équation se trouve aussi satisfaite par l'expression

$$\frac{1}{\mu}\{f(x) + f(\alpha x) + f(\alpha^2 x) + \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)\}.$$

En substituant ici les valeurs de $f(x)$, $f(\alpha x)$, etc., on reconnaît immédiatement qu'il ne reste que les termes dans lesquels les exposants de x sont des multiples de μ; cette expression devient donc

$$\Sigma A_{n-r\mu} x^{r\mu}.$$

Ce qui précède est confirmé par beaucoup d'intégrales connues d'équations différentielles.

Dans les équations suivantes, par exemple:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{d y}{d x} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{2(m+1)x}{1-x^2}\frac{d y}{d x} + \frac{(n-m)(n+m+1)}{1-x^2} y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d y}{d x} + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

où m et n représentent des nombres positifs entiers, dont le premier est plus petit que le second, on trouve remplies, si α désigne la racine primitive -1 de l'équation $\alpha^2 = 1$, les conditions

$$\alpha\ p_1(\alpha x) = p_1(x)$$
$$\alpha^2 p_2(\alpha x) = p_2(x),$$

Les intégrales connues de ces équations, à savoir:

$$y = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots$$

$$y = x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} x^{n-m-2} +$$
$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-m-4} - \ldots$$

$$y = x^n\left(1 - \frac{x^2}{2.(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right),$$

— intégrales qui, à part un coefficient, portent respectivement le nom de coefficients de Legendre, de fonctions *conjuguées* et de fonctions de Bessel de la 1ère espèce, possèdent, comme on le remarquera aisément, la forme $\Sigma A_{i\mu}\, x^{n-i\mu}$, où $\mu = 2$.

Pareillement, on reconnaît que l'équation

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{3}{x}\frac{d y}{d x} + \left(1 - \frac{n^2-1}{x^2}\right) y = \frac{n}{x^2},$$

dans laquelle n représente un nombre impair, est satisfaite par

$$y = \frac{n}{x^2}\left(1 + \frac{n^2-1^2}{x^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{x^4} + \ldots\right)$$

expression de la forme: $\Sigma A_{n-2r}\, x^{2r}$; ce qui ne doit pas surprendre, puisque les conditions

$$\begin{aligned} \alpha\, p_1(\alpha x) &= p_1(x) \\ \alpha^2 p_2(\alpha x) &= p_2(x) \\ \alpha^2 p(x) &= p(x), \end{aligned}$$

où $\alpha = -1$, sont remplies.

Comme on le sait, les valeurs de la dernière intégrale, pour des valeurs différentes impaires de n, s'appellent fonctions de Bessel de la 2e espèce, tandis que, pour n pair, les fonctions de Bessel de la 2e espèce sont déterminées par

$$y = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{x^4} + \ldots\right),$$

fonction qui satisfait à l'équation différentielle

$$\varphi(y) = \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{3}{x}\frac{d y}{d x} + \left(1 - \frac{n^2-1}{x^2}\right) y = \frac{1}{x}.$$

Dans cette équation, les conditions (3) ne sont pas entièrement remplies, et c'est pour cela qu'on ne trouve pas ici la

forme $\Sigma A_{n-2r} x^{2r}$. Comme dans ce cas, toutefois, les conditions

$$\alpha\, p_1 (\alpha x) = p_1 (x)$$

$$\alpha^2 p_2 (\alpha x) = p_2 (x)$$

$$\alpha^2 p \ (\alpha x) = \alpha p(x) = -p (x)$$

sont remplies, on peut conclure que si $f(x)$ satisfait à

$$\varphi (y) = \frac{1}{x},$$

$f(-x)$ satisfera à l'équation

$$\varphi (y) = -\frac{1}{x},$$

de sorte que

$$\varphi\left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right) = \frac{1}{x},$$

d'où il ressort que l'équation différentielle peut être satisfaite par une fonction impaire; en effet, de

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \psi (x)$$

il résulte

$$\psi (x) = -\psi (-x).$$

Si maintenant $f(x)$ est une fonction pouvant être développée suivant des puissances positives et négatives de x, $\psi (x)$ a la forme $\frac{1}{x} \Sigma A_{n-2r}\, x^{2r}$, ce qui s'accorde avec l'énoncé ci-dessus.

Comme application de ce qui précède, je ferai voir encore comment on y trouve le moyen d'abréger considérablement une démonstration donnée ailleurs.

Dans une étude concernant la forme de certaines différentielles dont les intégrales sont des fonctions purement algébriques [1]),

[1]) *Versl. en Meded. der Koninkl. Akad. v. Wet.*, Afd. Natuurk., T. XVII.

j'ai montré que l'équation

$$x(a+bx^n)\frac{dy}{dx}+\{(1+m)(a+bx^n)+(1+p)nbx^n\}y=c,$$

où m et n sont des nombres entiers, p une fraction quelconque et c une constante, ne peut être satisfaite par un polynôme P du degré i, à moins qu'on n'ait

$$(1+p)n+1+m+i=0 \quad \text{et} \quad P=\sum_{r=0}^{=\frac{i}{n}} A_{rn}x^{rn},$$

r étant un nombre positif entier.

Or, cela découle immédiatement de ce qui précède; car lorsqu'un polynôme du degré i peut satisfaire à l'équation, il faut qu'après substitution de ce polynôme le coefficient de x^{i+n} soit zéro, qu'on ait par conséquent

$$(1+p)n+1+m+i=0;$$

en outre, puisqu'on a, α étant une racine primitive de $\alpha^n=1$,

$$\alpha p_1(\alpha x)=p_1(x)$$
$$\alpha p\ (\alpha x)=p\ (x),$$

le polynôme, s'il existe, devra posséder la forme

$$\Sigma A_{rn}x^{rn}.$$

Parfois les coefficients de l'équation (2) sont tels que les conditions

$$\alpha\ p_1\ (\alpha x)=p_1\ (x)$$
$$\alpha^2 p_1\ (\alpha x)=p_2\ (x)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha^m p_m(\alpha x)=p_m(x)$$
$$\alpha^m p\ (\alpha x)=p\ (x)$$

sont remplies, quelle que soit la valeur de α.

Il est facile de déterminer chez quelles équations ce cas se présente. Soit, en effet, r une des valeurs $1, 2, .. m$; on doit alors avoir

$$\alpha^r p_r(\alpha x) = p_r(x)$$

$$\alpha^m p(\alpha x) = p(x)$$

même quand α varie. En différentiant donc par rapport à α la première de ces équations, il faut que

$$r\alpha^{r-1} p_r(\alpha x) + \alpha^r \frac{d p_r(\alpha x)}{d(\alpha x)} . x = 0,$$

d'où

$$p_r(\alpha x) = \frac{A_r}{(\alpha x)^r};$$

de sorte que

$$p_r(x) = \frac{A_r}{x^r}.$$

Pareillement, de la seconde des équations, il suit

$$p(x) = \frac{A}{x^m},$$

si A_r et A désignent des constantes indéterminées.

L'équation dans laquelle les conditions énoncées sont remplies est donc:

$$\frac{d^m y}{d x^m} + \frac{A_1}{x} \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \frac{A_2}{x^2} \frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}} + \dots \frac{A_m}{x^m} y = \frac{A}{x^m}.$$

En terminant, remarquons encore que les intégrales de l'équation

$$\frac{d^m y}{d x^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + p_2(x) \frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}} + \dots p_m(x) y = p(x), .. (4)$$

dont les coefficients et le second membre présentent une même période α, de sorte qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} p_1\,(x+\alpha)=p_1\,(x) \\ p_2\,(x+\alpha)=p_2\,(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_m\,(x+\alpha)=p_m\,(x) \\ p\;\;(x+\alpha)=p\;\;(x) \end{array}\right\}\dots\dots\dots\dots(5)$$

possèdent une propriété analogue à celle des intégrales de l'équation (2), dans laquelle sont remplies les conditions (3).

Si $f(x)$ *est une intégrale de l'équation* (4), *dans laquelle sont remplies les conditions* (5), $f(x+\alpha)$, $f(x+2\,\alpha)\dots$ *sont aussi des intégrales de cette équation.*

En effet, par la substitution de $x=z-\alpha$ dans (4), cette équation se transforme en

$$\frac{d^m y}{d\,z^m}+p_1(z-\alpha)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}}+p^2(z-\alpha)\frac{d^{m-2}y}{dz^{m-2}}+\dots p_m(z-\alpha)y=p(z-\alpha),$$

ou, si les équations (5) sont satisfaites, en

$$\frac{d^m y}{d\,z^m}+p_1\,(z)\frac{d^{m-1}y}{d\,z^{m-1}}+p_2\,(z)\frac{d^{m-2}y}{d\,z^{m-2}}+\dots p_m\,(z)=p\,(z).$$

Il en ressort immédiatement que, lorsque $y=f(z)$ est une intégrale de (4), cette équation est aussi satisfaite par $y=f(z)=f(x+\alpha)$. En changeant dans une intégrale x en $x+\alpha$, on obtient donc une nouvelle intégrale; par conséquent, $f(x+2\alpha)\dots$ sont également des intégrales de l'équation (4).

SUR L'EMPLOI DES

DÉTERMINANTS

DANS LA

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS,

PAR

P. VAN GEER.

Sous le même titre que ci-dessus, j'ai publié antérieurement (*Arch. Néerl.*, XII, p. 229), un article dans lequel étaient exposés les grands avantages de l'application des déterminants à la méthode des moindres carrés. Il n'y a pas longtemps, le professeur Glaisher de Cambridge, s'est occupé du même sujet (*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. XL, n°. 9 et Vol. XLI, n°. 1), et son mémoire me fournit une occasion de revenir encore une fois sur cette matière.

M. Glaisher dit que mon travail était le premier et, jusqu'à ce moment, le seul qui eût paru sur cet important sujet; la manière dont il traite la question concorde entièrement avec la mienne, et les résultats obtenus sont aussi les mêmes. Dans une note, il fixe l'attention sur une méprise commise par moi dans la notation des déterminants qui représentent les poids des résultats. Son observation est parfaitement fondée, et, aux yeux du savant Anglais, qui évidemment n'a examiné que les équations, sans pouvoir suivre le texte, la chose devait sembler plus grave qu'elle ne l'est en réalité. Le texte, en effet,

dit expressément qu'il faut prendre les mineurs du déterminant principal; mais, par inadvertance, la notation abrégée de ces mineurs, au § 2, a été mal écrite, la ligne de zéros ayant été placée suivant la diagonale principale, et non, comme il convient et comme c'était l'intention, suivant la ligne du terme dont on prend le mineur. La preuve qu'il s'agissait seulement d'une méprise, et non d'une erreur, résulte suffisamment de l'exactitude des résultats ultérieurs et de leur parfait accord avec ceux du mathématicien anglais.

Cette déclaration faite, je vais ajouter quelques remarques à propos de différents résultats obtenus par M. Glaisher. Ces résultats découlent si simplement des équations que j'ai prises pour point de départ et de la méthode de solution que j'ai employée, qu'un court calcul suffit pour les établir.

Pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre, je résumerai d'abord succinctement, en conservant la même notation, les résultats communiqués dans mon premier Mémoire.

Les équations primitives sont

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_1 + b_1 x_2 + C_1 x_3 + \dots + p_1 x_n = F_1, \\ a_2 x_2 + b_2 x_2 + C_2 x_3 + \dots + p_2 x_n = F_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m x_1 + b_m x_2 + C_m x_3 + \dots + p_m x_n = F_m. \end{array}\right\} \dots\dots (1)$$

Le nombre de ces équations est m, le nombre des inconnues n, et on a $m > n$. Nous ne tiendrons aucun compte des poids, qui n'ont rien à voir dans la question. Le système normal pour l'obtention des valeurs les plus probables des inconnues est

$$\left.\begin{array}{l} (aa)\, x_1 + (ab)\, x_2 + (ac)\, x_3 + \dots + (ap)\, x_n = (aF), \\ (ba)\, x_1 + (bb)\, x_2 + (bc)\, x_3 + \dots + (bp)\, x_n = (bF), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (pa)\, x_1 + (pb)\, x_2 + (pc)\, x_3 + \dots + (pp)\, x_n = (pF), \end{array}\right\} , . (2)$$

où, d'après la notation connue de Gauss,

$$\left.\begin{aligned} (aa) &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_m^2, \\ (ba) = (ab) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_m b_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (aF) &= a_1 F_1 + a_2 F_2 + \ldots\ldots + a_m F_m. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Les valeurs des inconnues sont donc

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \ldots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \ldots\ldots (4)$$

où

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (aa)\,(ab)\,(ac)\ldots(ap) \\ (ba)\,(bb)\,(bc)\ldots(bp) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pa)\,(pb)\,(pc)\ldots(pp) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} (aF)\,(ab)\ldots\ldots(ap) \\ (bF)\,(bb)\ldots\ldots(bp) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pF)\,(pb)\ldots\ldots(pp) \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} (aa)\,(aF)\ldots\ldots(ap) \\ (ba)\,(bF)\ldots\ldots(bp) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pa)\,(pF)\ldots\ldots(pp) \end{vmatrix}, \ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} (aa)\,(ab)\ldots\ldots(aF) \\ (ba)\,(bb)\ldots\ldots(bF) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pa)\,(pb)\ldots\ldots(pF) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} (5)$$

Les poids des résultats obtenus sont donnés par les expressions

$$G_1 = \frac{\Delta}{M_{11}}, \quad G_2 = \frac{\Delta}{M_{22}}, \ldots G_n = \frac{\Delta}{M_{nn}}, \ldots\ldots (6)$$

où les M représentent les mineurs en question et peuvent être écrits (correction faite des formes antérieures) de cette manière:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 1\;0\ldots\ldots\ldots\;0 \\ (ba)\,(bb)\ldots(bp) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pa)\,(pb)\ldots(pp) \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} (ab)\,(bb)\ldots(ap) \\ 0\;1\ldots\ldots\ldots\;0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pa)\,(pb)\ldots(pp) \end{vmatrix}, \\ M_{nn} &= \begin{vmatrix} (aa)\,(ab)\ldots(ap) \\ (ba)\,(bb)\ldots(bp) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots\ldots\ldots\;1 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} (7)$$

Poursuivons maintenant notre étude et, à cet effet, revenons sur le déterminant principal. Par la substitution des valeurs, il peut être écrit ainsi :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a^2_m, & a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_m b_m, \\ a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_m c_m, & \ldots a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_m p_m, \\ b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots\ldots + b_m a_m, & b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + b_m^2, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_m c_m, & \ldots b_1p_1 + b_2p_2 + \ldots + b_m p_m, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots\ldots + p_m a_m, & p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots\ldots + p_m b_m, \\ p_1c_1 + p_2c_2 + \ldots + p_m p_m, & \ldots p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_m^2. \end{vmatrix}$$

Par décomposition, il donne un nombre m^n de déterminants simples; mais ceux qui contiennent deux colonnes semblablement placées sont évidemment nuls, de sorte qu'il en reste $m(m-1)\ldots(m-n+1)$.

Sans avoir égard à cette remarque, nous prenons dans Δ le groupe

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2, \quad a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_n b_n, \\ \ldots a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots a_n p_n, \\ b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_n a_n, \quad b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2, \\ \ldots b_1p_1 + b_2p_2 + \ldots b_n p_n, \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ p_1a_1 + p_n a_2 + \ldots + p_n a_n, p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots + p_n b_n, \\ \ldots p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2, \end{vmatrix},$$

pour lequel on peut écrire

$$\begin{vmatrix} a_1a_2 \ldots a_n \\ b_1b_2 \ldots b_n \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ p_1p_2 \ldots p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1a_2 \ldots a_n \\ b_2b_2 \ldots b_n \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ p_1p_2 \ldots p_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1b_1 \ldots p_1 \\ a_2b_2 \ldots p_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_nb_n \ldots p_n \end{vmatrix}^2.$$

Le nombre de ces groupes contenus dans Δ est égal au nombre des combinaisons n à n de m éléments, de sorte qu'on peut écrire

$$\Delta = \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2,$$

où le signe Σ s'étend sur toutes ces combinaisons. Chacun des groupes renferme $1 . 2 . 3 \dots n$ déterminants simples non égaux à zéro; ce nombre, multiplié par le nombre des combinaisons, donne justement le susdit nombre de déterminants simples de Δ.

Les déterminants qui entrent dans les numérateurs des expressions des inconnues peuvent être transformés d'une manière analogue.

Prenons, par exemple,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_m F_m, \; a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m, \\ \dots a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_m p_m, \\ b_1 F_1 + b_2 F_2 + b_3 F_3 + \dots\dots b_m F_m, \; b_1^2 + b_2^2 + \dots\dots + b_m^2, \\ \dots b_1 p_2 + b_2 p_2 + \dots + b_m p_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3 + \dots + p_m F_m, \; p b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_m b_m, \\ \dots p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2, \end{vmatrix}.$$

On reconnaît que ce déterminant peut être décomposé en groupes tels que celui-ci

$$\begin{vmatrix} a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ \dots a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n, \\ b_1 F_1 + b_2 F_2 + \dots + b_n F_n, \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2, \\ \dots b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 F_1 + p_2 F_2 + \dots + p_n F_n, \quad p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n, \\ p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2, \end{vmatrix}$$

pour lequel on peut écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} F_1 F_2 \dots F_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_n \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}.$$

Tous les groupes analogues sont formés par la combinaison des m quantités n à n; d'après cela, on peut écrire

$$\Delta_1 = \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{vmatrix},$$

où le signe Σ s'étend sur toutes ces combinaisons.

Il suit de là que les valeurs probables des inconnues se laissent mettre sous cette forme:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \Sigma \begin{vmatrix} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} : \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2, \\
X_2 &= \Sigma \begin{vmatrix} a_1 F_1 \dots p_1 \\ a_2 F_2 \dots p_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n F_n \dots p_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} : \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_n &= \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots F_1 \\ a_2 b_2 \dots F_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots F_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_1 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} : \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Si l'on prend maintenant les n premières équations du système (1), et qu'on les résolve par rapport aux inconnues, on a, en désignant ces valeurs particulières par ζ,

$$\zeta_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}}, \quad \zeta_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 F_1 \dots p_1 \\ a_2 F_2 \dots p_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}}, \quad \zeta_n = \frac{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots F_n \\ a_2 b_2 \dots F_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_n b_n \dots F_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}} \dots \quad (9)$$

Le numérateur de ces expressions étant représenté par T et le dénominateur par N, de sorte que

$$\zeta_1 = \frac{T_1}{N}, \quad \zeta_2 = \frac{T_2}{N}, \quad \zeta_3 = \frac{T_3}{N}, \dots \xi_n = \frac{T_n}{N}, \quad \dots (10)$$

les valeurs probables de (8) peuvent être écrites ainsi :

$$X_1 = \frac{\Sigma N^2 \zeta_1}{\Sigma N^2}, \quad X_2 = \frac{\Sigma N^2 \zeta_2}{\Sigma N^2}, \dots X_n = \frac{\Sigma N^2 \zeta_n}{\Sigma N^2}, \quad \dots (11)$$

et ces valeurs concordent entièrement avec celles qui déterminent le centre de gravité d'un nombre donné de points matériels à poids différents. Elles font connaître la connexion entre toutes les valeurs différentes des inconnues, qui peuvent résulter de la combinaison des équations données, et la valeur la plus probable pour l'ensemble des équations.

Cette remarquable connexion peut être exprimée de cette manière :

Au moyen des m équations données, formons toutes les combinaisons indépendantes de n équations, et tirons de chacun de ces systèmes les valeurs des n inconnues; donnons ensuite à chaque système de valeurs le poids représenté par le carré du dénominateur commun, puis cherchons les moyennes de toutes ces valeurs (moyennes concordant avec le centre des points matériels à masse donnée); ces valeurs moyennes seront alors précisément les valeurs les plus probables, qui sont fournies aussi par la méthode des moindres carrés[1]).

Ce rapport simple entre les valeurs particulières découlant de chaque système d'équations et la valeur la plus probable correspondant à l'ensemble des équations, nous apprend que chaque système particulier de valeurs ne contribue pas également aux valeurs les plus probables, mais que le poids relatif d'une pareille solution est représenté par le carré du dénominateur. Lorsqu'on a obtenu différentes solutions particulières, le denominateur de chaque système sera donc la mesure de la valeur qui doit être attachée à chaque solution.

Le rapport trouvé donne en outre le moyen, étant connu un nombre considérable quoique non complet de solutions particulières, d'en déduire par approximation la solution la plus probable, sans avoir à passer par les laborieux calculs de la méthode des moindres carrés.

Les écarts entre les équations (1) et les valeurs probables étant représentés par la lettre q, de sorte que

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = a_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + p_1\, x_o - F_1, \\ q_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + p_2\, x_n - F_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + p_n\, x_n - F_n, \end{array}\right\}, \ldots\ldots (12)$$

[1]) Ce théorème se trouve aussi dans un Mémoire de Jacobi (De formatione et proprietatibus determinantium, *Journal de Crelle*, tome XXII, p. 285), qui paraît avoir échappé à l'attention de M. Glaisher et dont je n'ai pris connaissance que pendant l'impression de cette Note.

Σq^2 est la moindre somme des carrés des écarts et s'obtient de la manière suivante :

$$\Sigma q^2 = \Sigma (a x_1 + b x_2 + \ldots + p x_n - F)^2 =$$
$$= (a a) x_1{}^2 + (b b) x_2{}^2 + \ldots + (p p) x_n{}^2 + (F F) +$$
$$+ 2 (a b) x_1 x_2 + 2 (b c) x_1 x_3 + \ldots + 2 (a p) x_1 x_n +$$
$$+ 2 (b c) x_2 x_3 + \ldots + 2 (b p) x_2 x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- 2 (a F) x_1 - 2 (b F) x_2 - \ldots - 2 (p F) x_n =$$
$$= x_1 [(a a) x_1 + (a b) x_2 + \ldots + (a p) x_n - (a F)] +$$
$$+ x_2 [(b a) x_1 + (b b) x_2 + \ldots + (b p) x_n (b F)] +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- [(a F) x_1 + (b F) x_2 + \ldots + (p F) x_n - (F F)].$$

Comme, en vertu du système normal (2), tous les coefficients de x_1, x_2, ... sont nuls, il reste seulement

$$\Sigma q^2 = - [(a F) x_1 + (b F) x_2 + \ldots + (p F) x_n (F F)],$$

ce qui, par substitution des valeurs tirées de (4) et (5), devient

$$\Sigma q^2 = \frac{- (a F) \Delta_1 - (b F) \Delta_2 - \ldots - (p F) \Delta_n + (F F) \Delta}{\Delta},$$

$$\text{ou } \Sigma q^2 = \begin{vmatrix} (a a) (a b) \ldots (a p) (a F) \\ (b a) (b b) \ldots (b p) (b F) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (p a) (p b) \ldots (p p) (p F) \\ (a F) (b F) \ldots (p F) (F F) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a a) (a b) \ldots (a p) \\ (b a) (b b) \ldots (b p) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (p a) (p b) \ldots (p p) \end{vmatrix} \quad \ldots (13)$$

Il est facile de vérifier que les signes négatifs dans le numérateur, que n soit pair ou impair, sont impliqués dans le déterminant.

Cette forme élégante pour la somme des moindres carrés

se relie parfaitement aux résultats antérieurs. A l'aide des réductions précédentes, elle peut être écrite aussi de cette façon :

$$\Sigma q^2 = \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 & \cdots & p_1 F_1 \\ a_2 b_2 & \cdots & p_2 F_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_n & \cdots & p_n F_n \\ a_{n+1} b_{n+1} & \cdots & p_{n+1} F_{n+1} \end{vmatrix}^2 : \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 & \cdots & p_1 \\ a_2 b_2 & \cdots & p_2 \\ a_3 b_3 & \cdots & p_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_n & \cdots & p_n \end{vmatrix}^2 ; \quad \ldots \quad (14)$$

où l'on doit remarquer que le signe Σ, dans le numérateur, s'étend aux combinaisons des m quantités $n+1$ à $n+1$; tandis que, dans le dénominateur, il embrasse, comme ci-dessus, les combinaisons n à n.

Si le nombre des équations ne dépasse que d'une unité celui des inconnues, le numérateur de la dernière forme ne consiste qu'en un seul carré, facile à déterminer. L'erreur probable de chacune des inconnues étant désignée par r, on a, d'après la théorie des probabilités,

$$r_1^2 = \frac{\Sigma q^2}{G}, \quad r_n^2 = \frac{\Sigma q^2}{G_n}.$$

Par substitution de (6), (7) et (13), cette valeur devient

$$r_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} (bb)\,(bc) & \ldots & (bp) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (pb)(pc) & \ldots & (pp) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (aa)(ab) & \ldots & (ap)(aF) \\ (ba)(bb) & \ldots & (bp)(bF) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (aF)(bF) & \ldots & (pF)(FF) \end{vmatrix};}{\begin{vmatrix} (aa)\,(ab) & \ldots & (ap) \\ (ba)\,(bb) & \ldots & (bp) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (pa)(pb) & \ldots & (pp) \end{vmatrix}^2;} ; \quad \ldots \quad (15)$$

et des expressions analogues sont obtenues pour les autres erreurs probables.

On remarquera que le numérateur est formé du produit de deux déterminants, l'un du degré $n-1$, l'autre du degré $n+1$, tandis que le dénominateur se compose du carré d'un déterminant de degré n.

Dans cette dernière forme aussi, les déterminants peuvent être remplacés par des sommes; en appliquant toujours la même méthode de transformation, on obtiendra

$$r_1^2 = \frac{\Sigma \begin{vmatrix} b_1 c_1 \ldots\ldots p_1 \\ b_2 c_2 \ldots\ldots p_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n+1} c_{n+1} \ldots p_{n+1} \end{vmatrix}^2 . \; \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \ldots\ldots p_1 F_1 \\ a_2 b_2 c_2 \ldots\ldots p_2 F_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n b_n c_n \ldots\ldots p_n F_n \\ a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} \ldots p_{n+1} F_{n+1} \end{vmatrix}^2}{\Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_2 \ldots\ldots p_1 \\ a_2 b_2 \ldots\ldots p_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n b_n \ldots\ldots p_n \end{vmatrix}^2 . \; \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \ldots\ldots p_1 \\ a_2 b_2 \ldots\ldots p_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n b_n \ldots\ldots p_n \end{vmatrix}^2} \quad \ldots (16)$$

etc.; de cette manière, toutes les quantités qui ont de l'importance pour la solution du système d'équations sont exprimées sous des formes symétriques analogues.

CONTRIBUTIONS

À LA

PÉTROGRAPHIE DE L'ARCHIPEL INDIEN,

PAR

H. BEHRENS.

Lorsque, après avoir parcouru le Catalogue des roches que Junghuhn a rapportées des Indes, on examine pour la première fois les collections de ces roches, on éprouve un désappointement assez vif. La première impression que produit la vue des séries d'échantillons de Java est celle de l'uniformité. La grande majorité des roches éruptives se laissent immédiatement reconnaître comme a ppartenant à l'époque tertiaire ou post-tertiaire, ce qui est d'accord avec les conclusions auxquelles Junghuhn avait été conduit par les données paléontologiques (*Java*, III, p. 11, 345, de l'édition hollandaise). Ce sont des roches trachytiques et basaltiques, ces dernières offrant fréquemment un aspect trachytique, qui a induit Junghuhn en erreur dans beaucoup de cas. On peut dire la même chose de la plupart des conglomérats grossiers; eux aussi se reconnaissent d'emblée comme des amas consolidés de débris trachytiques et basaltiques. Il faut y regarder de près pour découvrir le petit nombre d'exceptions dans lesquelles on pourrait voir, peut-être, des représentants de la multitude de syénites, de diorites, de roches analogues au gabbro ou à la syénite, de talcschistes et de micaschistes, que Junghuhn énumère dans son Catalogue.

On doit avoir étudié sur les déjections volcaniques la nomenclature pétrographique de Junghuhn, on doit s'être rendu compte de la manière dont, il y a trente ans, il déterminait les roches, pour comprendre comment il a pu, avec la plus grande naïveté, faire traverser des couches tertiaires par des roches dont les noms impliquent pour nous une origine paléozoïque et même archaïque, comment il a pu établir des passages entre des roches d'époques très éloignées les unes des autres. C'est ainsi, par exemple, qu'il parle de basalte dioritique et de diorite basaltique (*Cat.* n°. 451), qu'il place le gabbro sous le diorite (*Java*, III, p. 413), qu'il parle de roches plus voisines du trachyte que du diorite (*Java*, III, p. 215), qu'il va même jusqu'à décrire en détail, comme composé d'albite et de hornblende, un „diorite" que, sur la même page (*Java*, III, p. 385), il dit avoir disloqué le terrain tertiaire.

Junghuhn déterminait les roches principalement d'après leur aspect extérieur, et, avec les moyens dont il disposait, il ne pouvait guère faire autrement. Les roches volcaniques de *couleur foncée*, il les nomme habituellement *basalte*, celles de *couleur claire*, *trachyte*. Fréquemment on rencontre chez lui ce tour de phrase: qu'une roche de ce genre est tantôt de nature plus doléritique, tantôt de nature plus trachytique. C'est en ce sens que sa nomenclature doit être interprétée. Rarement il se prononce sur l'âge de ses syénites, diorites, etc. La „syénite" du cratère du Keloet (*Cat.*, 224 et suiv.), il est porté à la regarder comme une roche ancienne amenée au jour par la lave, et il la compare à une syénite de Sumatra; mais, dans une remarque ajoutée plus tard (*ib.* 666), il tend vers l'opinion contraire. Ici, la roche en question, ainsi que la „syénite" du Goenong Malang, Lebak, qu'ailleurs (*Cat.*, 438) il nomme diorite, et la „roche syénitique" du Kali Look, Keboemen, dite ailleurs dioritique, ou analogue au gabbro, sont considérées par lui comme des roches filoniennes néo-tertiaires ou post-tertiaires, — en harmonie avec ses vues concernant les schistes cristallins de Keboemen, regardés comme des micaschistes ter-

tiaires (*Java*, III, p. 423). La délimitation chronologique des types de roches, aujourd'hui en usage, fait place chez Junghuhn à la délimitation d'après l'habitus. Traduits dans le langage pétrographique actuel, les susdits énoncés signifieraient environ: qu'au Keloet, au Malang, au Kali Look, se trouvent, en partie sous forme de filons, des roches tertiaires parallèles aux syénites et aux gabbros de Sumatra.

Finalement, il laisse pourtant indécise la question de savoir s'il s'agit d'éruptions à travers le terrain tertiaire ou du dépôt de sédiments tertiaires autour d'écueils plus anciens.

La „syénite" du Goenong Keloet est de l'andésite et de la dolérite; les „diorites" et les „roches syénitiques" du G. Merapi et du G. Oengaran sont des andésites à gros grains cristallins; la syénite (ailleurs „diorite orbiculaire") du G. Malang se reconnaît au microscope pour du trachyte quartzeux. Continuer dans cette direction n'offrirait pas grand intérêt.

Par rapport aux micaschistes et aux talcschistes, M. Verbeek (*Over de Geologie van Java*, dans *Tijdschr. d. Aardrijksk. Vereen.*, 1876) partage l'opinion de Junghuhn, suivant laquelle ce seraient des formations métamorphiques de la période tertiaire; en ce qui concerne les roches analogues au gabbro, lui aussi laisse la question en suspens [1]).

Or, ce sont précisément ces dernières qui, en raison de la présence facile à reconnaître du diallage, substance rare dans les roches tertiaires et jusqu'ici inconnue dans les post-tertiaires, conviennent mieux que toutes les autres pour trancher, par voie pétrographique, la question de savoir s'il existe réellement, à Java, des roches massives pré-tertiaires.

---

[1]) Postérieurement, en 1880, M. Verbeek a examiné de plus près les roches du mont Midangan (Kali Look et Satang de Junghuhn), parmi lesquelles il a trouvé du micaschiste, du talcschiste, du schiste ophiolitique et du porphyre quartzeux *anciens* (Verbeek en Fennema, *Nieuwe geol. Ontdekkingen op Java*, dans *Natuurk. Tijdschr. v. Nederl. Ind.*, t. XLI, 1).

Gabbro et Serpentine de la baie de Tjiletoek, Djampang Koelon, Tjandjoer.

La côte escarpée et rocheuse de la Wijnkoopsbaai est interrompue, là où se creuse la baie de Tjiletoek (Sand-Bai de plusieurs cartes anciennes), par une plaine alluviale, qui forme le rivage de cette dernière baie. A partir du cap Karang tao, la chaîne littorale, revers abrupt du haut plateau des districts de Djampang, s'incline du sud à l'est et, sous le nom de Goenong Linggoeng, entoure en arc ovale la plaine alluvienne semilunaire, large au milieu d'environ un mille, pour reprendre ensuite, à partir du cap Karang elang, culée sud-ouest de la baie de Tjiletoek, sa direction primitive vers le sud.

Le mur colossal du G. Linggoeng, qui en son milieu, à la chute du Tji Kandé, s'élève encore à 1100 pieds de hauteur, est composé de couches de conglomérats, décrits plus loin, qui sont traversées par de nombreuses masses éruptives. Dans sa partie septentrionale (vallée du Tji Marindjoeng) apparaissent des filons basaltiques, dans sa partie centrale (vallées du Tji Kandé et du Tji Letoek) des filons trachytiques, et à son extrémité sud-ouest, appelée Goenong Badak, les masses de gabbro et de serpentine dont je vais parler en premier lieu. Junghuhn en cite quatre gisements principaux:

1. G. Karang elang, au versant sud-ouest du G. Badak (*Cat.*, 671).
2. Un filon entre le cap Karang elang et le cap Karang kapitoe, en face de Poeloe Manoek (*Cat.*, 682).
3. Un second filon, au même endroit (*Cat.*, 680).
4. Cap Karang kapitoe, à ¼ de mille géographique du second des gisements cités (*Cat.*, 672—677).

Toutes ces masses de gabbro forment, suivant lui, de puissants filons dans du grès. Dans le catalogue de la collection de roches indiennes de Van Diest, le G. Karang elang porte le nom de G. Batoenoenggoel (v. D., n°. 124), le G. Badak est

appelé G. Tjikepoe (125, 126), un petit affluent du Tji Badak reçoit la désignation de Tji Batoenoenggoel. En outre, dans cette collection, est encore représenté un gisement, celui du Goenong Kapok (123), dont la situation n'a pu être fixée sur les cartes avec la certitude désirable. Probablement il appartient à la bande de gabbro qui se dirige de l'est à l'ouest vers le Karang kapitoe.

Une différence d'aspect frappante existe entre les échantillons de Karang elang (Junghuhn, 671, v. Diest 120, 126) et ceux du Karang kapitoe (J. 674, 675, 676). Les premiers se distinguent par de grandes lames de diallage, que leur éclat demi-métallique et leur couleur bronzée font ressortir sur la pâte terne et presque noire de la roche. La dureté est faible (2—3), de même la densité (2,63 à 2,7); la cassure est inégale ou grossièrement schistoïde. La roche du Karang kapitoe est de couleur beaucoup plus claire, vert grisâtre; elle est aussi beaucoup plus dure (5—6) et plus pesante (2,8 — 2,85), à cassure esquilleuse. La roche du G. Kapok (v. D. 123), d'un gris tacheté de vert brunâtre et de noir, sans cristaux macroscopiques de diallage, à dureté variant entre 2 et 7, ne peut être comparée à aucune des deux autres. Il en est de même de la roche Jungh. 672, qui d'après le Catalogue passerait insensiblement au gabbro 675, ainsi que des échantillons des gisements 2 et 3 (Jungh. 682 et 680).

Gabbro péridotique.

Parmi les échantillons du G. Karang elang, v. D. 120 est le mieux conservé, à en juger d'après sa dureté et sa résistance à l'action de l'acide chlorhydrique. Le diallage y possède une dureté s'élevant jusqu'à 5; en majeure partie il est de couleur brun-grisâtre, finement strié, et pauvre en petites aiguilles noires; il n'est pas dichroïque et se colore vivement entre les nicols. D'autres cristaux, en moindre quantité, sont vert clair, ont une forme distinctement prismatique, une structure gros-

sièrement fibreuse dans le sens longitudinal, avec des fentes transversales coupant les fibres à peu près perpendiculairement, des inclusions noires relativement grandes, un peu de dichroïsme et des couleurs de polarisation moins vives. L'existence du dichroïsme et plus encore l'essai de la dureté ($D = 3,5$) rendent probable qu'une transformation a eu lieu dans ce cas. La transformation paraît avoir porté sur une variété voisine du pyroxène, tandis que le diallage brun grisâtre a été épargné.

Le diallage est surpassé de beaucoup, sous le rapport de la masse, par un réseau irrégulier de trois substances différentes. L'espace intérieur des mailles est incolore, strié et pointillé de noir, à surface ondulée et crépue; le filet qui les entoure est fibreux, vert ou jaune, çà et là gris ou noir par suite de la présence de nombreux grains de magnétite.

Ce réseau est traversé de veines vertes, incolores et blanchâtres, fibreuses en travers, et de cordons blanc-jaunâtre, finement grenus, presque opaques. Le tout donne l'impression d'une masse péridotique à demi transformée en serpentine, fendillée, et cimentée de nouveau par des produits d'altération atmosphérique. Là où l'altération n'a pas fait de trop grands progrès, on trouve dans le filet des mailles les mêmes petites aiguilles noires que dans leur intérieur. Le parallélisme qui existe entre eux conduit à regarder les filets extérieurs comme des produits d'altération des noyaux incolores, et ceux-ci, en accord avec les phénomènes de polarisation (extinction parallèlement aux petites aiguilles), comme des fragments d'individus cristallins plus grands. L'absence des petites aiguilles dans les larges veines et cordons à fibres transversales indique que ceux-ci sont d'origine différente.

Pour la comparaison avec d'autres préparations, il est instructif de noter les transformations dont sont susceptibles les noyaux incolores. La plus fréquente est une coloration passant du vert, par le jaune, au brun-jaunâtre; en même temps, les noyaux se fondent insensiblement avec les filets qui les bordent, sans montrer le fendillement ou la formation de fibres, tels

qu'on les observe habituellement dans la métamorphose en serpentine des grains de péridot du basalte. Une autre altération des noyaux incolores consiste, au début, en ce qu'ils deviennent uniformément troubles et grisâtres. Le second stade de ce processus est de nouveau la coloration en jaune.

Une troisième espèce de transformation, peut-être un simple stade initial particulier, ne se manifeste qu'entre les nicols et dans l'essai de la dureté: le minéral reste incolore, il devient très finement grenu ou confusément fibreux, la couleur de polarisation, primitivement au-dessus de celle du diallage, descend jusqu'au blanc ou même jusqu'au gris du 1er ordre, et simultanément la dureté s'abaisse jusqu'à 1. Quant aux petites aiguilles noires, il est à remarquer qu'elles n'éprouvent aucune atteinte.

Cette singulière transformation en une substance stéatitique (vert pâle dans les préparations épaisses), le manque de serpentine rouge, la non-production de fissures et de fibres lors du changement de couleur, le défaut d'inclusions de picotite, l'absence de feldspath et de saussurite laissaient planer quelque doute sur la détermination, comme péridot, de la substance en réseau. La chaleur rouge colore le tout, même les cordons ayant l'aspect de la porcelaine, en jaune passant au brun-rougeâtre; la calcination avec la solution de cobalt produit une coloration gris foncé; l'action des acides sur une lame polie montre que le diallage et une partie des cordons opaques sont seuls insolubles. Dans la solution chlorhydrique on trouve en abondance *Mg* et *Fe*, mais seulement des traces de *Al.*

D'après cela, le minéral incolore doit, en dépit de plusieurs caractères remarquables, être regardé comme du péridot, et l'échantillon v. D. 120 comme une *roche à base de diallage et de péridot*, fissurée et en voie d'altération par les agents atmosphériques. Les cordons opaques sont formés d'une substance analogue à l'écume de mer et en partie silicifiée.

C'est de cette roche que se rapproche le plus l'échantillon Jungh. N° 671. Ici le diallage est dominant, de couleur jaune

brunâtre, à fibres moins fines, pauvre en petites aiguilles, riche en lamelles rouge-brun parallèles et perpendiculaires aux fibres, et qui à la lumière réfléchie présentent les phénomènes de coloration du fer oligiste. De noyaux de péridot, on ne voit aucun reste. Au lieu de petites aiguilles fines et parallèles, il y a des aiguilles rayonnantes plus grosses, qui, à mesure que la décomposition par les agents extérieurs fait des progrès, sont remplacées à leur tour par des productions plus épaisses, de forme très compliquée et d'apparence trichitique, puis par de petits corps claviformes, et enfin par des globules noirs. Je regarde toutes ces productions noires comme d'origine secondaire (*voir* Rosenbusch, *Mikr. Physiogr. d. Gest.*, p. 335). Les formes compliquées me paraissent résulter de l'épaississement, du raccourcissement et de l'agglutination de petites aiguilles noires rapprochées, et leur transformation en massues et en sphères s'explique par la concentration et le transport ultérieurs de la magnétite.

Dans l'échantillon v. D. 126, l'altération est plus avancée; de la matière en réseau, il n'y a plus rien de visible, sauf là où une structure fibreuse transversale s'est développée dans les cordons. La couleur du diallage incline au verdâtre, sa structure est confuse ou tout à fait brouillée; les lamelles de fer oligiste, à quelques taches brun pâle et plus ou moins effacées près, ont disparu. En correspondance avec ces caractères, la quantité de magnétite est aussi plus faible ici que dans l'échantillon Jungh. 671.

L'altération est portée encore plus loin dans les échantillons v. D. 122 et 124, masses vert foncé, d'aspect serpentineux. Le diallage, encore bien reconnaissable dans ces échantillons, ne se décèle au microscope que par quelques dépôts de fibres et quelques restes indistincts de lamelles de fer oligiste. Le péridot est partout ramolli, çà et là encore incolore, le plus souvent d'une teinte vert clair allant jusqu'au vert-brunâtre foncé; dans ces dernières parties, chez l'échantillon N° 122, la transformation des petites aiguilles noires en baguettes, trichites, massues et grains se laisse parfaitement suivre.

A toutes les roches dont il a été parlé jusqu'ici s'applique la même détermination qu'à v. D. N°. 120: ce sont des *roches à base de diallage et de péridot*, plus ou moins décomposées par les influences météoriques.

La roche du Goenong Kapok, v. D. 123, forme le passage de celle du Karang elang à celle du Karang kapitoe. Sur l'échantillon, elle paraît appartenir aux variétés claires de serpentine. Quand on la taille en lame mince, on est bientôt frappé de sa dureté et de l'apparition de taches blanches, de forme rectangulaire allongée. La préparation achevée présente, à un grossissement de 30 fois, un aspect particulier. Entre des baguettes incolores, pointillées de gris, qui s'étendent parallèlement sur de larges espaces, se trouvent des masses sphéroïdales jaune-brunâtre, à structure fibreuse radiée, parfois avec un noyau de spath calcaire. Cette même substance jaune, qui exceptionnellement prend aussi une couleur verte, remplit l'espace qui sépare les baguettes les unes des autres. Çà et là, la structure devient irrégulière. L'action de l'acide chlorhydrique fait reconnaître la présence d'une grande quantité de calcite, substance qui manquait entièrement dans les roches diallagiques-péridotiques décrites plus haut. Elle n'existe pas seulement dans les masses jaunes, mais aussi entre et dans les baguettes d'apparence feldspathique. Après deux heures d'action, la contexture de la roche est notablement éclaircie et les taches jaunes sont devenues vertes. Les plus grandes offrent alors, à peu d'exception près, des contours de cristaux ou d'agrégats cristallins, et de beaux phénomènes de polarisation des agrégats. On peut maintenant distinguer deux nuances de vert: le vert d'herbe, avec dichroïsme du jaune au bleu, appartenant à des coupes fibreuses ou lamellaires, de forme pyroxénique; et le vert brunâtre, sans dichroïsme, propre à des coupes finement grenues, en partie irrégulièrement hexagonales. Les premières doivent être regardées comme du *pyroxène* devenue chloritique, les secondes paraissent, d'après leur forme et leurs inclusions octaédriques brun foncé, provenir du *péridot*.

Les baguettes parallèles ont pu être déterminées, d'après quelques exemplaires montrant des stries dans la lumière polarisée, comme du *feldspath triclinique*. La plupart des cristaux sont devenus méconnaissables par le mélange de grandes quantités de calcite, de chlorite et de quartz, ainsi que par la transformation en saussurite, dans laquelle, après l'action des acides, on voit d'innombrables petites aiguilles noires, parallèles aux côtés les plus longs des cristaux. Partout sont disséminées des parties ferrugineuses: des grains de magnétite autour de la serpentine et au voisinage de la chlorite, et, distribuées irrégulièrement, des masses déchiquetées, bordées de gris clair dans la lumière réfléchie. Comme l'essai au chalumeau indique la présence du titane dans le résidu du traitement par l'acide chlorhydrique, ces bords gris ne peuvent guère être rapportés qu'au leucoxène.

Suivant M. Rosenbusch (*Mik. Phys. d. Gest.*, p. 432), cette substance n'a pas été trouvée dans le basalte; la roche du G. Kapok doit, d'après cela, être regardée comme un *diabase péridotique*, que les petites aiguilles noires de son élément accidentel feldspathique mettent en rapport intime avec le gabbro du Karang kapitoe.

Gabbro feldspathique.

Selon Junghuhn, les roches du Karang kapitoe sont des produits de transformation du gabbro du Karang elang. Comme type de ces roches il considère le N°. 672: „roche uniforme, de la nature du gabbro, de couleur vert-bleuâtre, çà et là rougeâtre". Les Nos 673—676 renfermeraient, dans une masse vert clair d'aspect serpentineux, des veines et des nids de quartz, ainsi que des cristaux noirs et altérés de diallage. Pour le N°. 676, il indique, au lieu de ces derniers, des veines noires, qui seraient traversées à leur tour par des veines de quartz vert.

Autant la description donnée par Junghuhn du gabbro du Karang elang est exacte, autant peu cela est le cas pour celle

du gabbro du Karang kapitoe. Dans le N° 672, avec un grossissement de 30 diamètres, on ne découvre encore rien de cristallin. La roche n'appartient nullement aux gabbros. Les N°s 673 et 674 n'ont évidemment été examinés que par simple inspection. La dureté est beaucoup trop grande pour de la serpentine et du diallage altéré. Peut-être la serpentine a-t-elle été déterminée d'après une matière remplissant des fentes, semblable au N° 677, chlorite calcarifère compacte, ayant une dureté de 2,5.

Les stries et taches blanches des N°s 674 et 675 peuvent, d'après l'aspect et la dureté, être confondues avec du quartz laiteux; mais, quant au N° 676, roche cristalline à gros grains, il est difficile de comprendre une pareille erreur de la part d'un observateur aussi exact que Junghuhn.

Toutes ces roches, à l'exception des N°s 672, 680 et 682, doivent probablement être regardées comme des gabbros feldspathiques, et les N°s 674 et 675, si l'on veut faire cette distinction, comme des gabbros saussuritiques. Le N° 673 n'a pas pu être étudié. Du plagioclase bien caractérisé ne se rencontre que dans le N° 676. Les cristaux atteignent jusqu'à 1 cm. de longueur et d'épaisseur; ils sont d'un blanc laiteux, rendus troubles par de fines granulations; en beaucoup de points, les parties saussuritiques troubles contiennent des petites aiguilles noires parallèles entre elles et montrent, entre les nicols, des stries assez grosses (0,02 mm. — 0,12 mm.), qui deviennent très distinctes sur quelques coupes cristallines.

L'acide chlorhydrique décèle dans cette roche, comme dans les deux autres gabbros du Karang kapitoe, un peu de calcite disséminée sous forme pulvérulente.

Sur les échantillons 674 et 675, vus à la loupe, on ne découvre qu'exceptionnellement une face de clivage feldspathique. Dans mes préparations, les coupes feldspathiques manquent entièrement. La pâte de la roche est formée d'une masse blanche, polarisant à la manière des substances grenues, qui à un grossissement de 600 fois se résout en une matière incolore, sans struc-

ture, et d'innombrables particules opaques, irrégulièrement disséminées. La dureté se rapproche de celle du quartz et l'atteint dans les plages claires, où effectivement, d'après la couleur de polarisation et la résistance à l'action de l'acide sulfurique chaud, se trouvent des inclusions quartzeuses.

La silicification est aussi très fréquente dans le bisilicate des deux roches. Au centre des cristaux de diallage transformés en actinote, on voit des parties incolores de quartz. Des fragments les plus gros partent des aiguilles d'actinote, qui pénètrent dans la masse saussuritique, la colorant en vert sur les préparations un peu épaisses. Des petites aiguilles noires du diallage, peu de chose a été conservé; c'est l'échantillon N° 676 qui en renferme le plus. Les grains métalliques, moins abondants que dans la roche v. D. 120 du Karang elang, sont en majeure partie bordés de gris. D'après la forme et la réaction au chalumeau, ils consistent en fer titané, accompagné de leucoxène. Tant que le gisement connu du leucoxène reste limité aux roches anciennes, les gabbros du Karang kapitoe et la roche du G. Kapok doivent être rapportés aux produits pré-tertiaires, et, avec eux, le gabbro péridotique du Karang elang.

Roches tertiaires de la baie de Tjiletoek.

La roche N° 672 de Junghuhn, mentionnée au paragraphe précédent, passerait insensiblement, d'après le Catalogue, au gabbro saussuritique du Karang kapitoe. L'échantillon rappelle la serpentine du Cap Lizard, mais la dureté (5,5 — 6) est plus grande. Pendant la taille, la couleur change; la préparation achevée est tachetée de brun-rougeâtre sur fond vert pâle. L'examen microscopique y fait reconnaître une *andésite pyroxénique* riche en verre, dont les longues aiguilles feldspathiques articulées (à conformation microlithique) sont groupées en élégantes étoiles. Comme éléments accessoires on y voit: la magnétite,

le fer oligiste en fines lamelles, le pyroxène et un peu de péridot en grains menus [1]).

Une structure et une composition analogues se retrouvent dans la roche v. D. 151 de l'île Poeloe Manoek, vis-à-vis de la seconde traînée de gabbro de Junghuhn, de laquelle provient l'échantillon N° 682 de sa collection. Cette roche doit également être rapportée aux andésites: c'est une *andésite pyroxénique quartzifère*, qui, outre la magnétite, renferme aussi un peu de pyrite. La troisième traînée de gabbro de Junghuhn est représentée par le N° 680, semblable, d'après le Catalogue, au N° 672. La roche est, comme le N° 672, une andésite pyroxénique; mais là s'arrête la ressemblance; car, tandis que le N° 672 est une roche fraîche, compacte, riche en verre, le N° 680 est une roche amygdaloïde, une lave très poreuse, remplie de produits d'altération météorique.

J'ai pu examiner des amygdaloïdes analogues de deux autres points de la muraille rocheuse du Linggoeng: l'une, v. D. 141, du G. Tjibioek, entre le cap Karang elang et l'embouchure du Tji Letoek, l'autre, v. D. 115, de la source du Tji Bantang, non loin de Tjikandé. Toutes les deux ont pour base de l'andésite pyroxénique riche en verre. Les noyaux sont chloritiques, en partie très petits (0,01 mm.), parallèles entre eux et aux microlithes de l'andésite, répandus aussi dans les parties *inaltérées* de la roche, et alors plus jaunâtres et translucides. L'étude ultérieure d'une lave amygdaloïde de Batoe toetoel, sur l'Idjèn, a rendu probable une relation entre ces roches amygdaloïdes riches en verre et une roche vitreuse qui a été trouvée plus au sud, entre le Karang kapitoe et le cap Tjitiram, près du Tji Boeajah, dans des conglomérats (Junghuhn N° 708); c'est un mélange d'andésite riche en verre, de tachylite et de palagonite — identique peut-être avec la palagonite de Djampang, étudiée par M. Rosenbusch.

---

[1]) Un aspect microscopique exactement semblable est offert par une lave rougeâtre du sommet du Tjerimaï.

Dans la coupure profonde que la chute des eaux du Tji Letoek a pratiquée dans la muraille rocheuse du G. Linggoeng, on peut, suivant Junghuhn, observer au moins 6 couches différentes de conglomérats, les Nos 650—658 de son Catalogue. Les échantillons des couches supérieures, 650—656, sont des grès et des schistes, formés de matériaux trachytiques et andésitiques. Dans le bas, se trouvent des roches dont Junghuhn ne saurait dire si elles sont de nature métamorphique ou éruptive: No 657, „roche à cristaux feldspathiques vitreux, à texture entièrement cristalline; il est incertain si c'est du grès métamorphosé ou bien du trachyte"; No 651, „conglomérat noir, très pesant, composé de grains d'aspect basaltique, de la grosseur d'un pois, fortement soudés entre eux".

L'une et l'autre doivent être regardées comme éruptives, comme appartenant à des coulées de lave. Le No 657 est une andésite pyroxénique extraordinairement riche en matière vitreuse; la roche No 658 est plus dévitrifiée et contient, outre le pyroxène, du péridot en grains isolés très gros, ce qui la rapproche du basalte.

Roches pré-tertiaires du Goenong Midangan, Keboemen, Bagelèn.

L'existence, sur le versant sud du Midangan, de roches anciennes appartenant probablement à la partie inférieure de la formation dévonienne ou à la formation silurienne, a été constatée d'une manière satisfaisante par MM. Verbeek et Fennema [1]; mais il n'en reste pas moins intéressant de chercher, à l'aide des échantillons recueillis par Junghuhn, comment il a pu être conduit à l'idée erronée de „micaschistes tertiaires".

M. Fennema limite le terrain pré-tertiaire du mont Midangan (c'est ainsi que, pour abréger, on peut appeler le massif mon-

---

[1]) *Nieuwe geolog. Ontdekkingen op Java*, dans: *Verhand. d. Kon. Akad. van Wet. te Amsterdam*, 1881.

tagneux dont le point culminant est formé par le dôme andésitique du G. Midangan), à la suite de hauteurs qui s'étend du village de Loh Kidang (Look Kidang chez Junghuhn), en passant par Sadang, vers le G. Midangan. C'est là que M. Fennema a trouvé du micaschiste, présentant des passages au schiste talqueux et au schiste quartzitique, du schiste serpentineux, du hornstein et du phtanite bruns ou brun-rougeâtre, des calcaires brun-rougeâtre et jaunes, et, plus haut sur le Midangan, entre les villages de Sigindit et de Pesangkalan, du porphyre quartzeux à feldspath en partie plagioclasique.

M. Verbeek a décrit le schiste serpentineux (au nord de Poetjangan, entre Loh Kidang et Sadang) et le porphyre quartzeux. Le schiste serpentineux contenait de petits octaèdres bruns, qui furent déterminés comme appartenant à la picotite, mais pas de restes de péridot ou de bisilicate, qui auraient pu éclairer sur son origine. Le porphyre quartzeux appartenait au groupe des microgranites de M. Rosenbusch. Le plagioclase était trouble, mais pourtant à stries distinctes; il ne paraissait pas mêlé d'orthose. La roche renfermait encore, outre le quartz à très petites inclusions liquides, un peu de pyrite et des lamelles de mica vert-jaunâtre.

D'après la description de Junghuhn, le mont Midangan est beaucoup plus large. Le versant méridional, celui dont il s'agit ici, est, en allant de l'est à l'ouest, partagé par le Kali (cours d'eau) Loh Oeloe, le K. Loh Kidang, le K. Sirongé et le K. Poetjong en trois massifs, qui au sud convergent dans la direction du village de Loh Kidang. Le massif oriental, appelé par Junghuhn la chaîne Look-Oeloe, a été exploré et décrit par M. Fennema. Dans le massif du milieu, Junghuhn indique aussi l'existence de roches ayant l'apparence de diorites et de gabbros (*Java*, III, p. 413), et dans le massif occidental, le G. Tjagang, celle de schistes talqueux traversés de filons d'une roche analogue au gabbro. Au sud-est du village de Loh Kidang, au milieu de masses de conglomérats, s'élève une cime andésitique, le G. Paras, dont la paroi orientale de la vallée

de Loh Oeloe paraît être le prolongement. La carte de Junghuhn montre le terrain pré-tertiaire s'étendant par delà le versant septentrional du Midangan jusqu'à la limite de Banjoemas et de Bagelèn, et envoyant aussi une couple de prolongements à l'ouest et au nord-ouest du village de Loh Kidang; mais, ni au sujet de ces prolongements, ni en ce qui concerne la lisière septentrionale, on ne trouve quelque éclaircissement dans la description géologique de l'île ou dans la collection de roches rassemblée par Junghuhn.

De la chaîne de Loh Oeloe, cette collection présente une vingtaine d'échantillons, J. 1301—1322. Les nombreux spécimens de micaschiste répondent, d'une manière générale, à la description donnée par M. Fennema. Quelques-uns d'entre eux contiennent des détritus d'amphibole et d'andésite, et il est facile de reconnaître, par un examen rapide de la masse réduite en poudre grossière, que ce sont des brèches. Le quartz, dans tous les échantillons étudiés sous ce rapport, était incolore, dépourvu d'inclusions liquides et, sous un faible grossissement, d'apparence grenue, rappelant le péridot, ce qui est dû aux nombreuses lamelles de mica et de talc qui y sont disséminées.

Junghuhn parle beaucoup de filons de diorite, qui traversent le micaschiste parallèlement à ses couches, et de passages entre le diorite, le micaschiste et le grès tertiaire (*Java*, III, p. 423; *Catalogue*, observations relatives aux Nos 1301—1303). Effectivement, il a rapporté du diorite du mont Midangan, le No 1311 de sa collection, qui est un fragment roulé d'un *diorite quartzeux* [1]) nullement altéré, recueilli dans le lit du Kali Loning, cours d'eau descendant du Midangan; mais cette roche est

[1]) Ne contient pas de mica. Dans le plagioclase, à côté de *Ca*, beaucoup de *Na* et un peu de *K*; dans l'amphibole, beaucoup de *Ca*, pas de *Mg*. Le quartz est subordonné, incrusté entre l'amphibole et le plagioclase; il renferme des inclusions d'eau et d'acide carbonique. Des caractères tout à fait analogues se retrouvent dans l'échantillon v. D. 99, des monts Kendang, chaîne dirigée de l'est à l'ouest, au sud-ouest du G. Gedé; c'est malheureusement le seul échantillon de cette localité que j'aie pu examiner.

désignée par Junghuhn sous le nom de syénite. Les échantillons qu'il a rapportés au diorite et au gabbro sont en partie de la *serpentine* et du *schiste amphibolique*, en partie des brèches et des conglomérats.

J. 1310 est du schiste amphibolique; la pâte cristalline grenue, dont parle Junghuhn, est du quarz transparent compacte, exempt d'inclusions liquides, mais, par contre, rempli de bâtonnets d'actinote.

J. 1276, détaché non loin du sommet du Midangan, est de la serpentine compacte. Il ressemble à celui décrit par M. Verbeek, jusque dans la présence de restes de diallage, qui, bien que leur dureté soit descendue à 4.5, sont suffisamment caractérisés par le clivage et par l'inclusion de petites aiguilles noires. Je n'y ai pas trouvé de restes de péridot; toutefois, la ressemblance avec la serpentine du Karang elang, près de la baie de Tjiletoek, est si grande, qu'on peut conclure, avec toute vraisemblance, à l'existence du péridot dans la roche d'où l'échantillon provient. En un autre point du Midangan a été pris le N° 1275, andésite pyroxénique bien conservée, de composition normale. La serpentine compacte paraît être placée au-dessous de l'andésite, entre celle-ci et le *porphyre quartzeux* trouvé par M. Fennema et que Junghuhn ne mentionne pas, bien qu'il en ait récolté un galet dans le lit du Loh Oeloe. Cet échantillon, N° 1266, est étiqueté comme brèche de quartz cristallisé et de quartz compacte, et pourtant, sur la cassure, les brillantes faces de clivage des grands cristaux de feldspath attirent immédiatement l'attention. Le microscope a permis de constater l'identité de cette roche avec le porphyre quartzeux décrit par M. Verbeek. Ici non plus, la présence de l'orthoclase n'a pu être reconnue d'une manière certaine par la voie optique. L'essai chimique a indiqué, dans le feldspath, une très petite proportion de calcium, et beaucoup plus de potassium que de sodium.

Les „diorites" J. 1308, 1309 et 1315, recueillis près de Sadang, sont des brèches et des conglomérats.

Le N° 1308 est composé de fragments à bords aigus, les uns,

de schiste amphibolique, contenant parfois de petits cristaux de grenat, les autres de hornstein jaune clair, liés par un ciment siliceux.

Le N° 1309 laisse reconnaître des fragments à bords aigus de schiste amphibolique, de micaschiste et d'andésite (non identique à l'andésite N° 1275), cimentés par du schiste serpentineux et, sur des fissures, par de l'opale et du quartz.

Si ces échantillons sont propres à répandre du jour sur les passages observés par Junghuhn entre le grès et le diorite, le N° 1315 rend le même service par rapport à la transition qu'il a annoncée entre le diorite et le micaschiste. D'après lui, cet échantillon représenterait le contact du diorite et du micaschiste; en réalité, c'est un conglomérat de petits galets de schiste amphibolique, d'esquilles de hornstein et de fragments de quartz, ayant pour ciment un mélange de mica et de talc.

Deux échantillons d'aspect diabasique de la même région, que j'ai reçus de M. l'ingénieur des mines J. van Heuckelum, étaient également composés de fragments de schistes anciens. L'un fut reconnu pour une brèche de schiste amphibolique (= J. 1310) et d'andésite du dôme du Midangan, liés par du tuf andésitique; l'autre pour un conglomérat de schiste amphibolique et de micaschiste, cimentés par des lamelles de mica et du quartz secondaire. Le schiste amphibolique de ces roches présentait de nouveau *deux variétés différentes*, l'une contenant du grenat, l'autre n'en renfermant pas; examinée de plus près, la variété grenatifère, qui n'a pas encore été trouvée comme roche indépendante au Midangan, paraissait elle-même être déjà un conglomérat, car tous les grenats avaient leurs angles arrondis.

On voit, par ce qui précède, quelle part importante des roches détritiques plus ou moins anciennes ont eue à la formation de cette partie des monts Midangan, et comment le mélange en proportion variable de fragments microscopiques de schistes anciens et d'andésite a pu faire naître chez Junghuhn l'idée erronée de formes de passage entre le micaschiste et le grès andésitique; de cette idée découlaient ensuite naturellement les

autres conclusions fausses, l'interprétation des schistes verts comme filons de diorite, etc., puisqu'il fallait bien trouver une cause à la métamorphose des grès en schistes cristallins.

Il reste encore à contrôler, en tant que cela est possible avec les matériaux très incomplets dont nous disposons, les indications de Junghuhn relatives aux rameaux moyen et occidental.

Dans le lit du Loh Kidang a été trouvée, en place, la roche N° 1295, que Junghuhn décrit comme une masse dioritique cristalline-grenue, tantôt verte, tantôt gris-verdâtre, parsemée de cristaux de pyrite et traversée en tout sens de veines de quartz blanc. Cette fois, Junghuhn a touché à peu près juste: la roche en question est un diabase, dont le pyroxène, en grande partie altéré, est en quelque sorte serré entre des rosettes de longs cristaux spiculaires de plagioclase. Il n'est plus possible de décider si ces éléments ont été liés par une base vitreuse. Outre la pyrite, qui est abondante, la roche renferme un peu de magnétite.

J. 1296, décrit comme roche talqueuse bleu-noirâtre, très dure, est de nouveau une brèche, dont le seul élément reconnaissable, le quartz, provient du micaschiste. Le ciment est une masse terreuse noire, dans laquelle l'essai chimique a montré la présence d'une grande quantité de pyrite finement divisée. Cette roche, de couleur tantôt plus claire, tantôt plus foncée, se rencontre jusqu'au G. Paras.

Les Nos 1289 et 1290 proviennent du faîte du rameau occidental, le G. Tjagang. Le premier de ces échantillons est une serpentine cristalline (grossièrement fibreuse) traversée de stéatite, et non, comme le veut Junghuhn, une roche de la nature du gabbro, composée d'albite et de diallage.

Le N° 1290 a été mieux déterminé: c'est un schiste amphibolique contenant du talc et du mica. Cette roche domine dans la partie septentrionale du G. Tjagang; plus au sud, elle alterne avec la serpentine.

Du flanc occidental du Tjagang, je n'ai examiné qu'une seule roche, J. 1286, schiste gris très tenace, recueilli dans le

lit du K. Poetjoeng. C'est une brèche composée de fragments de quartz, originaires du micaschiste, et d'un ciment abondant siliceux-andésitique. Ici paraît donc être atteinte la limite occidentale du terrain pré-tertiaire, comme la limite méridionale l'est probablement aux environs du village de Loh Kidang.

Les roches volcaniques de Java.

En 1879 ont paru des recherches microscopiques sur les roches volcaniques de Java, sous le titre: *Bijdrage tot de kennis der Javaansche Eruptiefgesteenten. Proefschrift door* J. Lorié. Rotterdam, Wyt en Zonen.

Il y est traité avec beaucoup de détails des numéros 1—295 de la collection de Junghuhn. Outre les observations microscopiques de l'auteur, on y trouve des extraits, rassemblés avec soin, de tout ce qui avait été publié antérieurement sur les volcans de Java.

Les notices qu'on va lire se rattachent à l'écrit de M. Lorié, en ce sens qu'elles en forment une révision et tendent à y combler deux lacunes sensibles. Beaucoup des échantillons de Junghuhn n'ont pas été étudiés par M. Lorié, et jamais, chez lui, les résultats de l'examen microscopique ne sont complétés et contrôlés par l'essai chimique.

Pour ce travail, j'ai fréquemment eu recours à des échantillons appartenant au musée de Leyde. Là où cela semblera nécessaire, ils seront désignés par les initiales M. L.; les lettres v. D. indiqueront, comme ci-dessus, les échantillons de la collection van Diest.

D'après la description détaillée donnée par Junghuhn, on peut se représenter la chaîne principale des volcans de Java comme située sur une fente longitudinale allant de l'ouest à l'est et croisée à

différentes reprises par des fentes transversales, sur lesquelles s'élèvent également des volcans. De l'inégale distribution des files transversales, et des lacunes dans la chaîne principale, résultent des groupes de volcans, dont le plus grand, celui des régences de Preanger, ouvre en même temps la série des volcans étudiés par Junghuhn. Un second groupe se rattache au mont Diëng, qui lui-même est un assemblage de cratères, un cirque volcanique, cirques qui, plus à l'est, deviennent plus fréquents et prennent un développement beaucoup plus considérable. Un troisième groupe paraît avoir pour nœud le mont Ardjoeno, d'une structure tout aussi compliquée que le mont Diëng, et marquer l'extrémité orientale de la suite de hauteurs volcaniques qui jusque-là reliait les cratères de la fente principale. Les volcans situés plus loin vers l'est sont isolés, ou bien ils sont unis deux à deux, ou trois à trois, par des selles basses, formées de matières meubles. La plupart se distinguent par leur colossales dimensions et leur structure compliquée.

La chaîne volcanique centrale, qui s'avance jusqu'à la pointe orientale de l'île, s'étend-elle également, à travers la province peu connue de Bantam, jusqu'à l'extrémité occidentale? D'après les indications de Junghuhn, entre le dernier volcan actif de la chaîne centrale et la pointe ouest de l'île, il existerait encore cinq ou six volcans éteints; ensuite, dans la partie nord-ouest de l'île, deux volcans en activité, le Karang et le Poelasari, appartenant à une fente transversale; enfin, sur une seconde fente transversale, à peu près parallèle à la première, entre la pointe orientale de Sumatra et la montagne la plus occidentale de Java, le Pajoeng, plusieurs cônes volcaniques insulaires, encore actifs en partie.

Partie occidentale de Java (Bantam).

M. Verbeek compte, sur la seconde des deux fentes transversales ci-dessus mentionnées, 7 points d'éruption, dont plusieurs devront probablement être réunis en un seul lorsqu'on en

aura fait l'étude sur les lieux (*Nieuwe geologische ontdekkingen* etc., dans *Nat. Tydschr. van Ned. Ind.*, t. XLI; voir aussi: Verbeek et Fennema, *Nouveaux faits géologiques observés à Java*, dans *Arch. néerl.*, t. XVI, p. 47). Dans la description de la partie méridionale de Sumatra, que M. Verbeek fera paraître prochainement dans le *Jaarb. v. h. Mynwezen in Ned. Ind.*, il traitera aussi en détail de cette chaîne d'îles.

Junghuhn n'a gravi aucune des montagnes regardées comme volcaniques de la partie occidentale de Java; sa collection de roches renferme toutefois maint échantillon provenant de leur voisinage immédiat.

Tels sont, en premier lieu, plusieurs échantillons d'origine éruptive du pied du *Pajoeng*, Nos 369, 371, 372 du Catalogue. La pointe occidentale de Java consiste en écueils et en îlots, qui paraissent être en connexion avec le Pajoeng, cône sans cratère, haut de 471 mètres. De l'écueil, surmonté d'un phare, qui porte le nom de *Java's* 1e *punt*, M. Verbeek décrit une andésite amphibolique et pyroxénique, riche en verre et à structure perlitique, et une autre roche, quartzifère, intercalée dans la première en amas irréguliers, et qui, d'après lui, est un porphyre rétinitique-andésitique avec sphérolithes. Les points d'où proviennent les échantillons de Junghuhn sont situés au sud de l'écueil du phare. Le N° 369 est un conglomérat trachytique à ciment calcaire, contenant beaucoup de restes organiques; le N° 372, du versant occidental du Pajoeng, est un conglomérat fortement altéré de trachyte quartzeux; le N° 371, du même point, est un trachyte quartzifère, dont la sanidine forme l'élément prédominant. L'amphibole est devenue en grande partie chloritique, le quartz est très subordonné dans cette roche.

Une ligne tracée du Pajoeng au Salak, le plus rapproché des volcans de Preanger, passe d'abord par la région basse du sud de Bantam; plus à l'est, dans la division de Lebak, elle rase les masses montagneuses du G. Liman, du Kiaragoena, de l'Alimon [1]) et du Perwakti. Au nord, mais touchant aux contre-

[1]) Qu'il serait probablement plus correct d'écrire: Halimon.

forts de l'Alimon, se trouvent le G. Bongkok, le Sadjira et le mont Jassinga, que Junghuhn dit avoir un sommet creusé en forme de cratère.

De quelques-unes de ces montagnes, nous avons des échantillons: du Liman, les numéros 411, 418, 423, 427, 428, 438, 451, 452, 453 du Catalogue de Junghuhn;

du Kiaragoena, les numéros, 533, 535;

de l'Alimon, les numéros, 539, 540, 541, 543, 545, 547, 548.

Le massif du G. Liman se compose d'un grand nombre de crêtes et de cimes coniques, qui, suivant Junghuhn, seraient en partie formées de diorite (roche du G. Malang et des vallées du Tji-Liman et du Tji-Masoek: *Java*, t. III, p. 342, *Catalogue* N°s 418, 423 et 427). Les N°s 418 et 423 sont des *trachytes quartzeux* ayant coulé, fortement altérés. Le bisilicate du N° 418 a été du pyroxène; outre la sanidine, la roche renferme beaucoup de plagioclase. Le N° 427, rétinite trachytique perlitique, ne contient, à côté de nombreux microlithes feldspathiques, que quelques cristaux macroscopiques de sanidine.

Le trachyte quartzeux s'étend, dans la vallée du Tji-Liman, plus loin au nord que Junghuhn ne l'indique pour son „diorite", au moins jusqu'au G. Batoe, près de Sereweh, où a été pris le N° 418; au sud il s'étend jusqu'à un second G. Batoe, dont la roche est plus fraîche et moins quartzifère que le N° 418.

Environ 7 kilomètres plus à l'est, Junghuhn indique de nouveau du „diorite", au G. Malang. Le N°. 436, du lit du Tji-Wangoen, sur la partie moyenne du versant sud de la montagne, est une *dacite* riche en quartz, désignée dans le Catalogue de Junghuhn, à cause des fissures qui la divisent en écailles concentriques, sous le nom de diorite orbiculaire. Outre le plagioclase, elle contient, comme élément subordonné, de la sanidine. Les grains de quartz atteignent jusqu'à 5 millimètres de diamètre. Le N° 441, du lit du Tji-Peng, à l'extrémité orientale du même versant, est beaucoup plus pauvre en quartz, et celui-ci ne s'y décèle qu'au microscope. L'amphibole est mieux conservée que dans le N° 438; le feldspath, au contraire, est altéré à un haut degré.

La dacite paraît, du reste, être répandue à l'est du G. Liman jusqu'aux sources du Tji-Sihi [1]); c'est ce qu'annonce un fragment roulé, le N° 470 du Catalogue de Junghuhn, recueilli dans la partie inférieure du cours du Tji-Sihi.

Comme roche en place, on trouve dans la partie moyenne de la vallée du Tji-Sihi (près de Hoïwala) de l'andésite pauvre en pyroxène et ayant un aspect semblable à celui du grünstein (Nos 451 et 452).

La première masse montagneuse un peu importante qui se présente ensuite, le Kiaragoena, appartient déjà, d'après la carte de Junghuhn, aux contreforts de l'Alimon. Faut-il y rapporter les échantillons 533 (andésite pyroxénique) et 355 (d'aspect basaltique, pauvre en pyroxène, dépourvu de péridot, contenant de la calcédoine)? La question reste indécise.

Il y a plus de certitude quant à la localité des Nos 539 et 540, qui proviennent de l'extrémité sud du Goen. Tanggil, lequel est désigné comme rameau de l'Alimon. Tous les deux sont des trachytes quartzeux (ou des andésites quartzeuses?) contenant de l'amphibole et plus ou moins altérés, 539 à un haut degré, 540 moins fortement. Dans la préparation de ce dernier, il y a beaucoup de plagioclase et un peu de biotite.

La roche N° 541, du G. Boedak, au fond de la Wynkoopsbaai, ressemble à s'y méprendre à celle dont il vient d'être question. Le N° 543, du cap Karang goea, est un *trachyte à sanidine et oligoclase;* les Nos 545—548, du G. Mesigit, à 15 kilomètres au sud du Boedak, sont des roches *basaltiques.*

Des montagnes situées plus au nord, j'ai eu à ma disposition peu de matériaux utilisables. Deux échantillons de roches trachytiques du pied du G. Jassinga (v. D. 60 et 62) ont été déterminés comme andésites pyroxéniques compactes, riches en verre; le tuf blanc, semblable à de la craie, qui au sud du Karang et du Poelasari, dans la division de Lebak, paraît

---

[1]) Appelé à tort Tji-Siki par Junghuhn.

s'étendre sur un espace de plusieurs milles (Junghuhn 394, 395), a été reconnu pour un mélange d'éclats de feldspath, de microlithes feldspathiques, de verre incolore, d'un peu de pyroxène clair et de très peu d'argile et d'ocre (tuf ponceux).

Du Poelasari j'ai reçu, par l'obligeance de MM. Schuurmann et van Heuckelum, ingénieurs des mines, quatre échantillons de roches: N° 1, d'aspect basaltique; Nos 2—4, andésites pyroxéniques, le N° 2 modifié de la même manière que les laves silicifiées du Tjiwiidaï et du Papandayang, dont il sera question plus loin. — Un échantillon de l'extrémité nord-ouest de l'île (St. Nicolaaspunt) était une andésite pyroxénique amphibolifère et péridotifère.

A ces indications très incomplètes se borne ce que j'avais à dire de la constitution pétrographique de la province de Bantam. Le résultat général en est que, dans la partie occidentale de Java, il s'est produit à l'époque pré-pliocène des éruptions sur une échelle grandiose, comparables à celles de la Hongrie et de la Transylvanie, qui ont amené au jour, avec une extension non soupçonnée jusqu'ici, des *trachytes et andésites quartzifères.* Malgré la pénurie des matériaux, l'existence de ces roches le long de la limite méridionale de la résidence de Bantam a pu être mise hors de doute, et, pour les régions centrale et septentrionale, elle a été rendue plus ou moins probable. A côté d'elles, nous avons reconnu des trachytes et andésites dépourvus de quartz, ainsi que, aux bords de la région, des basaltes, qui près de la Wynkoopsbaai se substituent aux roches quartzifères. Plus loin vers le sud, dans le district Djampang koelon des Régences de Preanger, ces dernières roches apparaissent de nouveau, aux environs de Pesawahan et de Tji Mas. Existe-t-il ici, à quelque distance de la côte, une liaison entre ces dépôts, et des éruptions pliocènes et post-pliocènes ont-elles rompu des nappes de liparite et de dacite et épanché au-dessus d'elles des cônes volcaniques? On peut espérer que le levé géologique de Java, aujourd'hui en voie de préparation, donnera, dans quelques années, la réponse à ces questions.

Les volcans de Preanger.

Ce groupe se distingue au premier coup d'œil par le grand nombre de cônes, relativement petits, qui sont condensés autour d'un plateau, lequel doit être regardé comme la continuation des hautes terres du sud-ouest de Bantam. Par le G. Salak, qui s'avance le plus vers l'ouest, ce groupe se rattache aux ramifications orientales de l'Alimon. Le Salak et le Gedé, par leur grandeur et leur situation isolée, se détachent des autres membres du groupe; entre eux deux il y a une distance de 30 kilomètres, tandis que le Gedé est éloigné de près de 90 kilomètres de ses voisins orientaux.

Si l'on prolonge vers l'est la ligne qui joint le Salak au Gedé, cette ligne sépare les mieux connus des autres volcans de Preanger en deux sections, qui peuvent l'une et l'autre être regardées comme des chaînes, dirigées de l'ouest à l'est. A la chaîne septentrionale appartiennent, comptés de l'ouest à l'est: le Tankoeban Praoe, le * Tampomas et le Tjerimaï. Ils sont distribués assez également sur une distance à peu près égale à celle qui sépare le Tankoeban Praoe du Gedé, et une ligne menée du Tjerimaï au Tankoeban Praoe passe à une petite distance au nord du Salak et à environ 6 kilomètres au sud du Tampomas.

La section méridionale se partage en trois rangées parallèles entre elles et dirigées obliquement par rapport à la section septentrionale. Celle qui est située le plus au nord se compose des cônes à cratère * Patoea et Goentoer (avec la solfatare Kawa Kiamis); la rangée moyenne est formée du * Wajang, du Kawa Manoek et du * Telaga Bodas; la rangée méridionale comprend le Papandayang et le Galoenggoeng.

Entre ces montagnes à cratère s'élèvent de nombreux sommets non creusés en bassin, mais dont l'origine éruptive est certaine pour les uns et vraisemblable pour les autres.

---

* Les cratères éteints seront marqués du signe *.

Tout près du Tankoeban Praoe, sur la ligne qui le joint au Salak, s'élève, à une faible hauteur, le mont Boerang-rang, de forme annulaire; ensuite, sur la ligne de jonction du Patoea et du Goentoer, on trouve le Tiloe, le Malawar et le Rekoetak, et, à l'est du Goentoer, le Sidakeling; enfin, entre le Papandayang et le Galoenggoeng, est situé le Tjikoraï.

Il y a, en outre, deux suites de hauteurs qui s'étendent, l'une du Papandayang, par le Patoea et le Kawa Manoek, jusqu'au Malawar; l'autre, du Tjikoraï, par le Galoenggoeng et le Telaga Bodas, jusqu'au Sidakeling. Ces suites d'élévations font apparaître les volcans de la rangée méridionale moyenne comme appartenant à des chaînes transversales, par lesquelles l'espace compris entre les rangées volcaniques Patoea-Goentoer et Papandayang-Galoengang est divisé en trois vallées, se succédant de l'ouest à l'est.

A tout cela vient s'ajouter encore une chaîne en forme d'arc, qui unit la section septentrionale des volcans de Preanger à la section méridionale. Partant du Tankoeban Praoe, elle se dirige au sud-est, en contournant le plateau de Bandong, à l'extrémité nord-est duquel elle se bifurque, puis, par ses deux branches, dont l'une se porte sur le Goentoer, l'autre sur le Sikadeling, elle va se rattacher aux deux rangées de la section méridionale.

De ses nombreux sommets: Boekit toenggoel, Menglajang, Boekit djarian, Sembilang, Gerimbi, Roejong, Boedjong, Mandalawangi, peu de chose est connu. Le Boekit toenggoel, le voisin oriental du Tankoeban Praoe, est jusqu'ici le seul dont on ait pu examiner des échantillons de roches. Par cet arc montagneux, les volcans de Preanger sont enchaînés en un grand fer à cheval, à l'exception de quatre, qui conservent une position isolée: le Tamponas et le Tjerimaï au nord-est, le Gedé et le Salak à l'ouest; ces deux derniers se trouvent au côté ouvert du fer à cheval, aux branches duquel ils sont unis par des rangées de collines basses, formées, dit-on, de matériaux sédimentaires.

D'après les recherches de M. Lorié, deux espèces de roches seulement auraient pris part à l'édification des volcans de Preanger: le basalte plagioclasique et l'andésite pyroxénique. Ces mêmes roches, suivant M. Verbeek, sont généralement répandues dans les volcans de Sumatra, mais avec une autre répartition. Là, le basalte est rare, à Java il forme, au dire de M. Lorié, la roche dominante. Parmi les nombreuses montagnes volcaniques des régences de Preanger, il n'y en aurait, d'après M. Lorié, que trois d'andésite: le Gedé, le Patoea et une partie du Malawar.

Beaucoup des basaltes de M. Lorié contiennent de la sanidine, plusieurs ne renferment pas de péridot. Sans qu'un essai chimique ait eu lieu pour s'assurer de la présence d'un silicate magnésien soluble dans l'acide chlorhydrique, ces formations douteuses ont été rapportées au basalte, simplement, paraît-il, d'après les particularités de leur structure microscopique.

Une révision m'a semblé ici absolument nécessaire. Les résultats vont en être communiqués aussi brièvement que possible. Renvoyant pour la description détaillée au travail de M. Lorié, je ne m'étendrai que sur les numéros dont il n'a pas parlé et sur ceux à l'égard desquels je suis arrivé à des résultats différents.

1. *Goenoeng Salak.* Nos 1, 2, 3 du Catalogue de Junghuhn. Andésite pyroxénique, en partie péridotifère; d'après M. Lorié, basalte.

Le No 1 a une structure microporphyrique, la pâte est granophyrique, par la prédominance de microlithes pyroxéniques arrondis; les Nos 2 et 3 ont une pâte microlithique feutrée, avec peu d'inclusions plus grosses.

Par l'essai chimique, on a pu reconnaître dans le No 1 un peu de péridot; les Nos 2 et 3 cédèrent à $H\,Cl$ une très grande quantité de Ca et de Al, pas de Mg, action qui est propre, comme on le verra plus loin, aux variétés basiques de l'andésite.

v. D. 54 ne donne pas la réaction du Mg, mais s'accorde du reste avec J. 1.

v. D. 102, de la cime la plus élevée, le G. Gajak, ressemble sous tous les rapports à J. 1.

v. D. 163, du pied de la montagne, est de la ponce blanche, qui sous le microscope se montre composée essentiellement de fils ondulés de verre incolore et jaune clair. N'est pas attaqué par *H Cl.*

2. *G. Gedé.* J. 4—7. Andésite pyroxénique, en partie péridotifère. D'après M. Lorié, les Nos 6 et 7 sont du basalte. Dans le No 4, M. Lorié indique de la tridymite, que je n'ai pu trouver. Les Nos 5 et 6 donnent une faible réaction de *Mg.* Dans le No 7, où M. Lorié indique quelques petits cristaux de péridot, devenus brunâtres par altération, cette substance n'a pas été rencontrée par moi.

v. D. 64, du versant nord-ouest, se rapproche beaucoup plus du basalte que les échantillons de Junghuhn. La présence d'une quantité notable de péridot serpentinisé y a été constatée, tant au microscope, que par la voie chimique. L'aspect, toutefois, est celui d'une andésite.

v. D. 166, du Megamendong, croupe située à l'est de Buitenzorg et regardée comme une lave contre-foulée du Gedé, est noir, extrêmement compacte et tenace, à cassure semi-vitreuse, et ne laisse distinguer au microscope que des microlithes de plagioclase et des grains ferrugineux. Aspect franchement basaltique, si l'on veut faire abstraction du manque de péridot, comme le fait fréquemment M. Lorié. Par contre, l'examen de la liqueur provenant de l'attaque par l'acide chlorhydrique ne décèle pas de *Mg* et seulement une trace de chaux, tandis que les réactions de *K* et de *Na* sont très nettes. Ainsi, andésite, peut-être même trachyte.

Des formes de passage entre l'andésite pyroxénique et le basalte sont très répandues à Java. La structure microscopique ne fournit pas de critère sûr pour la classification; mais, en appelant à son aide les réactions chimiques, on trouve ce critère dans la recherche du péridot, lequel doit exister en proportion notable, comme élément *essentiel*, pour que la roche puisse être rapportée aux basaltes.

3. * *G. Panggerango.* Cratère colossal, subordonné au Gedé, à l'ouest de celui-ci, probablement plus ancien. Manque chez M. Lorié. Un produit d'éjaculation de son versant occidental, v. D. 60, a été immédiatement reconnu pour du basalte plagioclasique scoriacé, avec péridot abondant et remarquablement peu altéré.

Du Manellawangi, haut cône éruptif sans cratère, je n'ai pas eu de matériaux à ma disposition.

4. * *G. Boerangrang.* J. 8. Andésite pyroxénique, péridotifère. Négligé par M. Lorié.

Le Boerangrang est dans la même relation avec le Tankoeban Praoe que le Panggerango avec le Gedé. Les échantillons 8 et 9 de Junghuhn ont été récoltés au pied de la montagne, du côté sud. Le N° 9 est fortement altéré. Le N° 8, fragment d'une déjection noire, bulleuse, laisse voir sur la cassure quelques cristaux brillants de feldspath. Le microscope y montre du plagioclase bien conservé dans une pâte microlithique à base incolore, du pyroxène en inclusions petites et peu nombreuses, de la magnétite et du péridot encore plus rares, ce dernier devenu rouge par altération. La roche est à la limite entre l'andésite et le basalte.

5. *G. Tankoeban Praoe.* J. 9—26. Basalte, généralement bien caractérisé, quoique le plus grand nombre des préparations montrent un commencement d'altération. Ordinairement riche en verre rendu trouble par des granulations. Cristaux de péridot petits, mal conformés, de même que ceux de magnétite. M. Lorié parle de globulites, qui à un grossissement de 500 diamètres apparaîtraient sous la forme d'anneaux brun foncé, à centre clair. Ils seraient particulièrement gros dans les N°s 10 et 21. En supposant l'observation bien faite et bien interprétée, on devrait en conclure à l'existence de globules discoïdes concaves, ou de globulites complexes, formés d'un noyau clair entouré d'un anneau foncé. Ce ne peuvent être des sections de sphéroïdes, car leur diamètre est près de 20 fois moindre que l'épaisseur de la préparation. Dans l'échantillon Jungh. N° 10, ces productions sont effectivement d'une grandeur exceptionnelle et peuvent aussi présenter

la forme décrite; mais, en outre, mises exactement au point, elles peuvent prendre l'aspect de globules presque incolores, fortement réfringents, enveloppés de verre brun. La forme annulaire est l'apparence habituelle des inclusions sphéroïdales qui ne sont pas rigoureusement au point, surtout quand elles sont éclairées par la lumière non amortie du soleil ou d'une lampe. A défaut d'une dénomination meilleure pour ces corpuscules isotropes, on peut leur conserver celle de „globulites", en n'oubliant pas, toutefois, que les sphéroïdes auxquels Vogelsang a appliqué cette désignation (globules de soufre précipités d'une solution épaissie, globules contenus dans des laitiers de hauts-fourneaux de Siegburg et de Pont-l'Evêque) ont en outre la propriété de se grouper en files, ou même, quand les circonstances sont favorables, en dendrites régulières. M. Lorié cite 18 laves de Java contenant des globulites. Je puis encore enrichir cette liste de quelques numéros, tels que Jungh. 26, 110, 113, 115, 116; mais, parmi ces préparations, il n'y en a qu'une seule (110) dans laquelle j'aie trouvé des globulites avec tendance au groupement dendritique.

Une particularité digne d'être notée, c'est l'abondance de biotite brun-jaunâtre, bordée de noir, dans le N° 19, du versant sud, à l'ouest de Lembang. La biotite est ici représentée au moins aussi fortement que le pyroxène. La roche est, du reste, indubitablement basaltique.

Le N° 23 est remarquable en ce que le péridot s'y trouve comme substance intercalaire, à côté d'une pâte de microlithes globulitiques. La preuve qu'il s'agit ici d'un péridot à caractère insolite, c'est la couleur tantôt verte tantot rouge-jaunâtre du produit de son altération, et l'existence de noyaux incolores dans plusieurs des taches vertes.

v. D. 211, du bord du cratère, ne ressemble pas à J. 10 et 11 de la même localité. Ces derniers échantillons sont riches en verre globulitique, le premier a une texture finement cristalline, renferme beaucoup de péridot et de magnétite et répond à un basalte plagioclasique normal mieux qu'aucun autre des

échantillons de Junghuhn. On voit, d'après cela, qu'il faut mettre beaucoup de réserve dans les conclusions à tirer des observations faites sur le petit nombre de préparations dont nous pouvons disposer pour les montagnes en question.

Les Nos 12, 13, 14, 16 ne sont pas mentionnés par M. Lorié. En ce qui concerne le N° 12, Junghuhn dit qu'il est semblable au N° 11 du bord de cratère, qu'il est en partie décoloré et que, par l'action prolongée de SO^2, il se transforme en alunite blanc-rougeâtre. Le N° 14 est décrit comme lave noire, alternant en couches minces avec du tuf jaune; le N° 16, comme cendre volcanique du fond du cratère principal Kawa Ratoe, composée essentiellement de silicate d'alumine.

Le N° 14 présente effectivement l'aspect d'un mélange stratifié. Toutefois, les bandes terreuses pénètrent à peine à 1 centimètre de profondeur dans la masse de lave. L'uniformité de celle-ci, sous le rapport de la dureté et de la structure, ne permet pas non plus de songer à des couches de lave qui se décomposeraient alternativement avec une rapidité différente. L'aspect de la masse est dû au plissement d'une lave fluide et au remplissage subséquent des plis par du tuf ocreux.

Le N° 16 est composé en majeure partie de tubercules microscopiques de silice hydratée. C'est probablement un produit de fumerolles.

Le N° 12 ne peut être rapproché du N° 11; il offre plutôt de l'analogie avec v. D. 211.

Le N° 13 a l'aspect du steinmark de couleur claire, mais une dureté assez grande. La structure ressemble à celle du N° 12; la composition, ainsi que la couleur, est totalement changée. De grains métalliques, il n'y a plus que des restes insignifiants; le pyroxène et le péridot ont entièrement perdu leur double réfringence, les grains de plagioclase en montrent encore çà et là des traces. En même temps, la structure s'est conservée jusque dans les moindres détails. La constitution microlithique des grains de plagioclase apparaît avec une netteté surprenante, les microlithes de la pâte se voient beaucoup plus

distinctement que dans le N° 12; à la structure des squelettes incolores, on peut distinguer les fragments de pyroxène de ceux du feldspath, et à l'aspect de la surface, le pyroxène du péridot. Ce remarquable produit de décomposition ne contient pas de sulfates solubles dans l'acide chlorhydrique; outre $S O^2$, l'eau doit avoir agi sur lui en grande quantité. Dans le tube d'essai, il donne beaucoup d'eau; avec la solution de cobalt, il ne devient pas bleu; avec la soude, il fond en perle limpide. C'est donc un produit de silicification par une masse d'opale, produit aussi parfait dans son genre que les plus beaux bois silicifiés.

6. * *Boekit toenggoel.* J. 29. Basalte à cristaux assez gros (anamésite), riche en pyroxène et en péridot, pauvre en magnétite.

7. * *G. Patoea.* J. 30—39. Andésite pyroxénique et basalte. De même nature sont les roches J. 40—53, provenant de la solfatare Kawa Tjiwidaï, au sud-est du Patoea.

Suivant M. Lorié, toutes les roches qui viennent d'être citées sont des andésites pyroxéniques avec sanidine et amphibole. Pour les échantillons 30, 31, 32, de la vallée de Tjiwidaï, sur le versant septentrional du volcan éteint, je suis arrivé au même résultat. Le N° 31 est pour moi, non de la ponce, mais de l'andésite perlitique. Le N° 33, également de la vallée de Tjiwidaï, se rapproche du basalte. Le pyroxène n'est pas, comme dans les échantillons précédents, dichroïque, et, avec lui, la roche renferme du péridot bordé de rouge, en quantité notable.

N° 34, le seul échantillon de roche en place et bien conservée du cratère du Patoea (côté sud), est un basalte (anamésite) à pâte microlithique fortement dévitrifiée.

v. D. 113, du cratère du Patoea, s'accorde mieux avec la description de M. Lorié: On y reconnaît bien encore la présence du péridot, mais il est peu abondant et en petits fragments. Les N°s 35—39 sont des produits de décomposition provenant du lac qui occupe le fond du cratère, ou de ses bords.

8. *Kawa Tjiwidaï*, solfatare, au sud-est du Patoea. J. 40 et

v. D. 112, andésite pyroxénique, le premier exceptionnellement riche en verre, le second contenant du péridot et devenu trouble par altération.

Junghuhn parle de plaques de grès décomposé. Au centre du cratère plat du Tjiwidaï, se trouverait un amas de blocs, presque entièrement composé de cette matière. La description rappelle la présence simultanée de plaques de grès et de bombes volcaniques sur le bord des lacs de Daun. A en juger par les matériaux dont nous disposons (J. 41—53), Junghuhn s'est trompé. Il s'agit de hornstein et de kieselsinter, en partie terreux (46, 47), en partie grésoïdes (48), en partie stalactitiques (52).

Le cratère du Tjiwidaï paraît être particulièrement riche en dépôts siliceux. Dans la collection van Diest, il y a un certain nombre d'échantillons de ces dépôts, dont trois ont été examinés quant à la proportion de silice qu'ils renferment: v. D. 208, tuf tachant les doigts, ayant l'aspect du kaolin, contient 98,3 °/₀ $Si\,O^2$; N° 127, gris, finement grenu, ayant l'apparence du grès, contient 97 °/₀ $Si\,O^2$; N° 129, hornstein grisâtre, translucide, contient 98 °/₀ $Si\,O^2$.

Du * *G. Tiloe*, montagne voisine de la précédente, nous ne possedons pas d'échantillons.

9. *G. Malawar*. J. 54, 55, 56. Andésite et trachyte. Le premier de ces trois échantillons, une andésite pyroxénique, provient d'un conglomérat qui forme les rameaux les plus septentrionaux de la montagne; les deux autres ressemblent à des basaltes à grain extrêmement fin et de couleur foncée. Le N° 55 a été recueilli sur le versant ouest, le N° 56 sur le versant sud-ouest; tous les deux sont des cailloux roulés, pris dans des ruisseaux qui descendent du Malawar. Tous les deux sont pauvres en grands cristaux; le N° 55 a une structure fluidale, le N° 56, dans lequel la pâte constitue au moins les ¾ de la préparation, une structure irrégulière. L'essai chimique y démontre l'absence du péridot et les fait reconnaître pour des roches riches en sanidine, pour des variétés très vitreuses d'un trachyte à sanidine et oligoclase.

10. *G. Wajang*. J. 58—68. Andésite pyroxénique, en partie amphibolifère; d'après M. Lorié, basalte.

Le Wajang est une croupe en forme d'arc, qui unit le Malawar au Papandayang. Au côté concave, tourné vers le sud, se trouve une solfatare encore en activité; elle est située sur le versant de la seconde des trois cimes distinguées comme Wajang septentrional, W. moyen et W. méridional, à peu près à égale distance entre le Malawar et le Papandayang. C'est de là que sont originaires les numéros 59 et 61, les autres ont été récoltés au sommet de la cime moyenne. Dans le N° 58, on croit reconnaître, à l'œil nu et à la loupe, du péridot; à cause, toutefois, de la couleur rubigineuse générale des surfaces de cassure, cette détermination reste incertaine, et l'examen chimique la contredit formellement. Dans le N° 59, on ne découvre pas de péridot à la loupe, mais bien par la voie chimique, et sur les coupes minces on finit aussi, après des recherches répétées, par distinguer quelques fragments de ce minéral.

En ce qui concerne la pâte de la roche, il y a beaucoup d'uniformité entre les divers échantillons: elle est formée essentiellement d'un mélange irrégulier de très petits microlithes feldspathiques et de verre incolore en proportion subordonnée, mélange dans lequel sont disséminés des microlithes plus grands, de feldspath (aussi de pyroxène dans le N° 64), et de nombreux cristaux et cristalloïdes visibles à l'œil nu. Dans les Nos 59, 60, 61 il y a beaucoup de sanidine, dans le N° 61 autant de sanidine que de plagioclase.

Au sujet des cristalloïdes de couleur foncée, particulièrement abondants dans les laves du Wajang, M. Lorié émet différentes assertions qui ont besoin d'être contrôlées.

Dans le N° 59, ces cristalloïdes sont de même dimension que les cristaux porphyriques; quelques-uns ont les contours du pyroxène, d'autres ceux de l'amphibole, dont le clivage est parfois aussi indiqué par des lignes plus foncées que le reste; d'autres encore sont irréguliers de contours et de structure. Environ la moitié d'entre eux laissent voir des noyaux transparents,

de pyroxène, d'amphibole ou de biotite, suivant les contours. Sous la lumière incidente, ces taches foncées sont grises ou gris-brunâtre (cette dernière teinte s'observant surtout chez les taches à contour amphibolique), bordées de noir, plus claires au voisinage du noyau que près des bords. Dans le N° 60, ces masses grises manquent, mais par contre il s'y trouve, en nombre moindre, des masses d'un noir mat. Il en est de même du N° 62, où les agrégats noirs sont encore moins nombreux; dans les Nos 64 et 68, ils font entièrement défaut. Tous ces échantillons proviennent du sommet; le N° 59, au contraire, vient de la solfatare, ainsi que le N° 61, qui d'après Junghuhn (*Java*, II, 73) peut être considéré comme le type de la plus grande partie des blocs qu'on trouve dans cette localité. Junghuhn parle de cristaux brun-rougeâtre, qu'il regarde comme de la hornblende décomposée. M. Lorié décrit ces cristaux aux pages 121 et 122 de son ouvrage. Pour une partie seulement ils consisteraient en magnétite et, dans ce cas, ils seraient quelquefois bordés de brun; dans le cas contraire, ils seraient entièrement bruns. A côté d'eux, il y aurait du pyroxène bordé de brun. Je n'ai pas pu voir la belle couleur brune dont parle M. Lorié, pas plus que la magnétite en agrégats cristallins découpés à jour et dentelés, ayant jusqu'à 2 millimètres de longueur (p. 125). Les cristalloïdes de ce genre qui se trouvent dans mes préparations (de 2 millimètres à 0,012 mm.) montrent à la lumière incidente une couleur variant du brun-rougeâtre au rouge brique, conformément à la description de Junghuhn, et ils ont les contours de l'amphibole et du pyroxène. Cela s'applique aussi aux grandes sections découpées à jour (dentelées). A côté de ces cristalloïdes, on voit du pyroxène incrusté de rouge et du pyroxène vert-jaunâtre tout à fait inaltéré. Evidemment, les formations décrites ne peuvent être déclarées, purement et simplement, des „produits de transformation du pyroxène et de l'amphibole par la chaleur". En admettant que l'action longtemps continuée de la chaleur puisse produire le dédoublement de ces minéraux en une substance à peu près

dépourvue de fer et une substance riche en fer, noire ou brun foncé, encore faudrait-il expliquer pourquoi, dans le N° 59, le produit de la décomposition est *gris*. Il ne peut être question ici de décoloration par des vapeurs acides, puisque les échantillons Nos 60 et 62 sont plus altérés que le N° 59 et que, dans une coupe de celui-ci, on a rencontré des fragments de péridot intact. En outre, il faudrait expliquer pourquoi, dans les Nos 60, 61, 62, une *partie* seulement du bisilicate a été transformée, car on y voit un pêle-mêle de cristaux les uns opaques, les autres bordés ou n'ayant subi aucune altération.

11. *G. Goentoer*. J. 81, 82*a* et *b*, déjections, basaltes riches en péridot; J. 88, obsidienne. La pâte des basaltes du Goentoer, comme l'a déjà remarqué M. Lorié, est granophyrique, par suite de la profusion de microlithes pyroxéniques rudimentaires. Ces microlithes apparaissent d'une manière particulièrement frappante dans l'abondant verre brun du N° 82*a*, scorie semblable à de la ponce, que M. Lorié n'a pas examinée. v. D. 206, du bord du cratère, ressemble à J. 81. Le péridot y prédomine sur le pyroxène, comme c'est aussi le cas dans les échantillons de Junghuhn.

J. 88, une obsidienne gris clair, pauvre en produits de dévitrification, trouvée à environ 8 kilom. au nord-est du Goentoer, diffère tant des roches qui viennent d'être décrites, qu'on est conduit à douter, avec M. von Richthofen, qu'elle appartienne au Goentoer. D'après M. van der Boon Mesch, cette obsidienne contient 79,4 °/₀ SO^2, par conséquent un excès de plus de 10 °/₀ comparativement au trachyte dépourvu de quartz. M. Lorié cite, comme volcans les plus rapprochés, le Boekit toenggoel, le Tampomas et le Telaga bodas. Mais il a oublié les prédécesseurs éteints du Goentoer, le Mesigit et l'Agoeng, qui s'élèvent dans son voisinage immédiat, au nord-est, et la solfatare Kawa Kiamis, située au nord-ouest de l'Agoeng. En outre, parmi les sommets de la chaîne qui unit le Tankoeban Praoe au Goentoer, il y en a plusieurs qui sont plus rapprochés que le Goentoer du point où a été recueillie l'obsidienne, par exem-

ple, le Mandalawangi, à 2 kilom. de distance, le Boedjang, à 4 kilomètres.

12. *Papandayang*. J. 91—86, v. D. 104, 213, tous des basaltes.

M. Lorié n'a étudié que le N° 91. Les Nos 92 et 93 sont décomposés à un haut degré. Les autres laves, plus ou moins poreuses, sont pauvres en péridot, et ce minéral y est toujours transformé en serpentine. Par là, elles se rapprochent de l'andésite pyroxénique. Le pyroxène est abondamment représenté, d'une couleur remarquablement claire et à biréfringence faible. La magnétite est également abondante, et ses grains atteignent jusqu'à 0,5 millim. Dans v. D. 104 et J. 91, il y a des taches de verre brun (non trouvé par M. Lorié), remplies de longs trichites noirs (0,05 mm.). Dans J. 94, le verre brunâtre est troublé par de petits grains noirs, dans J. 96, par une matière pulvérulente rouge et noire, qui recouvre fréquemment d'une croûte rouge les cristaux de pyroxène.

J. 93 présente la même transformation remarquable que J. 13 du Tankoeban Praoe. La masse s'est fendillée pendant la silicification, et les fissures ont été bouchées par de l'opale limpide, d'un jaune pâle.

De nature analogue est v. D. 128, du cratère du Papandayang, masse blanc jaunâtre, semblable à du marbre, ayant la dureté du feldspath. On n'y trouve pas de fissures remplies d'opale. La composition chimique est : 87 $Si\,O^2$, 3 $Al^2\,O^3$, 10 $H^2\,O$.

Du * *Tjikoraï*, haute montagne conique sans cratère, entre le Papandayang et le Galoenggoeng, il n'y a pas d'échantillons de roches dans la collection de Junghuhn, bien que cet explorateur ait fait l'ascension de la montagne (*Java*, II, 548).

Le * *Kratjak* (entre le Tjikoraï et le *Sidakeling* (au nord du Telaga bodas) n'ont pas été visités par Junghuhn ; il les désigne comme des cônes tronqués, d'anciens volcans effondrés (*Java*, II, 554).

13. *G. Telaga bodas*. J. 100, v. D. 106. Andésite pyroxénique. Non mentionné par M. Lorié. Ce volcan est situé environ 20 kilo-

mètres au sud-est du Goentoer, au centre de la chaîne de hauteurs qui unit le Sidakeling au Galoenggoeng. Le cratère se trouve à une altitude de 5220 pieds (de Paris), sur le versant sud-ouest. Il renferme un lac presque circulaire, de 2000 pieds de diamètre, dont l'eau est chargée d'alun. On ne connaît pas d'éruption à ce volcan, pas plus qu'au Tjikoraï. Toutefois, Junghuhn parle de dépôts de soufre et d'une forte fumerolle, ainsi que de sources chaudes au bord septentrional du bassin.

La roche J. 100, de la rive sud, a une pâte feutrée, composée de microlithes pyroxéniques et feldspathiques, noyés dans un verre incolore, et de trichites brun foncé. La magnétite est rare, de même que le pyroxène porphyrique. Çà et là on voit, sous forme de taches, des parties où la base vitreuse est transformée en groupes radiés de longues aiguilles vertes.

v. D. 106 est plus altéré, le trouble ayant envahi plus des ⅔ de la masse. Les parties restées transparentes consistent en verre jaune clair, avec microlithes feldspathiques, groupés en étoile. La conservation de la base vitreuse, en présence de l'état de décomposition avancée des éléments cristallins, serait, chez une roche basaltique, un fait peu ordinaire.

14. G. Galoenggoeng. J. 101, v. D. 212, 214, 191. Basalte, très chargé de péridot.

La roche v. D. 212, de l'extrémité supérieure de la cavité du cratère, ressemble à J. 101, décrite par M. Lorié.

Au-dessous du cratère, l'espace compris entre le Tji Tandoï et le Tji Woelan est couvert de monticules de déjections volcaniques, les uns formés par l'éruption de 1822, les autres d'une date plus ancienne.

D'une de ces éminences, près du Kampong Telaga, à 11 kilomètres au sud-est du cratère, provient l'échantillon v. D. 214, qui ressemble à v. D. 212. D'après cela, il paraîtrait qu'en effet, lors de la dernière éruption (1822), il s'est produit une explosion partielle du cratère, qui a répandu sur la plaine située au sud et au sud-est de la montagne, en même temps que de la boue volcanique (fournie par un lac analogue à celui

qui occupe le cratère du Telaga bodas), des fragments de la paroi du cratère. Néanmoins, cette éruption a aussi amené au jour des matières de formation nouvelle, comme le prouve l'examen de v. D. 191, originaire d'un des nombreux monticules qui bordent la route de Singaparna à Tassik Malayoe, tracée en travers du champ de projection. Cet échantillon est beaucoup plus riche que les précédents en verre globulitique et en péridot; mais il est plus pauvre en pyroxène et en magnétite porphyrique, et les cristaux de péridot n'y montrent aucune trace d'altération.

15. * *G. Tampomas*. v. D. 105, 210. Basalte et andésite pyroxénique et amphibolique.

De ce cône de scories en forme de dôme (5100 pieds), entouré d'un rempart cratériforme plus ancien (*Java*, II, 593), Junghuhn n'a rapporté que quelques produits de déjection, masses spongieuses brunes, tellement ramollies qu'on a pu y reconnaître seulement quelques cristaux blanchis de feldspath et qu'on a vainement essayé de les tailler en lames minces.

De meilleurs résultats ont été obtenus avec les échantillons de la collection van Diest. Le N° 105, du pied de la montagne, est un basalte plagioclasique bien conservé, de composition normale et à pate microlithique pauvre en verre; le N° 210, rapilli du penchant, est au contraire de l'andésite, passablement altérée. La roche a beaucoup de ressemblance avec J. 61, du Wajang. Sa composition chimique est remarquable par la forte proportion de silicate de chaux soluble dans *H Cl*, qui dénote une andésite *anorthitifère*, variété qui n'est pas précisément rare dans les parties centrale et orientale de Java.

16. *G. Tjerimaï*. J. 104, du sommet de la montagne, andésite pyroxénique; suivant M. Lorié, qui y a trouvé du péridot bordé de noir, basalte. C'est un feutrage extraordinairement dense de microlithes dans un verre incolore. Magnétite en petits grains et en petites masses rouillées, irrégulièrement conformées. Pyroxène brun-jaunâtre clair et vert, distinctement dichroïque. Le fragment examiné était d'un gris foncé; un autre, de cou-

leur brun-rougeâtre et à texture grumeleuse, fournit une préparation dont l'aspect microscopique s'accordait mieux avec la description de M. Lorié. Le péridot y manquait toutefois aussi complètement que dans la lave grise.

Le Tjerimaï et le Salak occuperaient, d'après ce qui précède, une position isolée parmi les volcans de Preanger. Si l'on marque sur une carte, suivant la nature de la roche qui les constitue, les volcans dont il a été question jusqu'ici, on reconnaît que les cônes basaltiques se groupent au nord et au sud d'une série de volcans andésitiques, composée du Patoea avec le Tjiwidaï, du Wajang, du Malawar et du Telaga bodas. Au sud se trouvent les cônes basaltiques du Papandayang et du Galoenggoeng, au nord le Goentoer et, en seconde ligne, le Boerangrang, le Tankoeban Praoe, le Boekit Toenggoel et le Tampomas. Les volcans andésitiques sont tous à peu près éteints, plus de la moitié des volcans basaltiques sont encore actifs. Ce groupement peut être purement fortuit; néanmoins, il est assez naturel de supposer qu'une période éruptive plus ancienne a fourni de l'andésite, une plus récente, prolongée jusqu'à nos jours, essentiellement du basalte; de nombreuses analogies, tirées de différentes contrées volcaniques, viendraient à l'appui de cette présomption.

Au voisinage des volcans de Preanger, les roches andésitiques sont largement répandues; à l'ouest prédominent les variétés quartzifères, tandis qu'à l'intérieur du groupe volcanique ce sont les variétés dépourvues de quartz qui paraissent l'emporter. La collection Junghuhn nous en offre des échantillons du bord septentrional du plateau de Bandong, de son centre, à l'ouest du Malawar, et du versant sud du Papandayang jusqu'à la limite est de Soekapoera. Au nord-ouest, elles s'étendent, d'après la collection v. Diest, jusqu'au-delà de Jassinga, où des roches prétertiaires en émergent sous forme d'écueils isolés, comme à la baie de Tjiletoek; à l'est, on les trouve jusqu'au G. Sawal, d'où provient v. D. 228, andésite pyroxénique quart-

zifère avec veines de blende et de pyrites. Sur ce large espace, le basalte ne paraît se rencontrer qu'à l'état de filons et culots isolés (Wynkoopsbaai, vallée de Tjihéa).

La situation périphérique des bouches éruptives les plus récentes, par rapport aux volcans éteints et au plateau qu'ils surmontent, n'a rien d'étonnant si l'on songe aux vastes groupes et cirques volcaniques de la partie orientale de Java; là, le déplacement des points d'éruption, du centre vers la périphérie du système volcanique, n'est pas rare du tout (Diëng, Ardjoeno, Semeroe, Raon-Idjen) et est même regardé par Junghuhn comme l'indice d'une haute antiquité et le symptôme d'une extinction prochaine. L'idée de chercher, par cette voie, à coordonner sous un point de vue commun les volcans du groupe de Preanger ne rencontre aucune difficulté sérieuse; par contre, on pourrait être tenté, en faveur d'elle, de séparer du groupe en question le Salak et le Tjerimaï, deux volcans actifs qui paraissent avoir fourni essentiellement, le Tjerimaï même exclusivement, des produits d'éruption andésitiques.

Au versant sud du Tankoeban Praoe, de l'andésite apparaît au jour (v. D. 216, rive du Tjiberem), et de même sur la pente du Tampomas. Les échantillons du Gedé, faisant partie de la collection Junghuhn, sont de l'andésite; v. D. 64, au contraire, du versant nord-ouest, est indubitablement du basalte, roche qui compose aussi les rapilli du flanc occidental du cratère accessoire, le Panggerango. Deux cendres du Gedé, de 1863 et de 1866 (v. D. 77 et 78), sont, d'après les résultats de l'étude chimique et microscopique, de nature basaltique.

Du Wajang, j'ai examiné des rapilli (J. 76). Il était facile de constater que la matière présentait des caractères particuliers; pour décider si c'était du basalte, je fis l'examen de la liqueur provenant de l'attaque par l'acide chlorhydrique. Elle renfermait une grande quantité de *Ca* et de *Mg* et une faible proportion d'alcalis.

Du Salak, je n'ai eu en main aucun produit des éruptions les plus récentes, de sorte que, pour cette montagne, je dois laisser la question indécise.

Du Tjerimaï, il n'y avait non plus à ma disposition ni cendres, ni rapilli. Un conglomérat volcanique, rapporté par Junghuhn du bord nord-ouest du cratère, avait l'aspect tellement altéré qu'il semblait ne pouvoir rien apprendre. Après quelques tentatives infructueuses, je réussis pourtant à obtenir d'une croûte plus solide une préparation susceptible d'être examinée au microscope; elle y montra l'aspect inattendu d'une brèche pyrogène, composée de fragments à angles aigus d'andésite et de basalte à demi altéré (diamètre généralement au-dessous de 1 millim.), cimentés par de l'andésite péridotifère intacte (pouvant aussi être regardée comme du basalte pauvre en péridot). L'acide chlorhydrique attaquait fortement cette brèche; dans la solution, les réactifs décelaient la présence d'une grande quantité de *K* et d'une moindre proportion de *Ca* et de *Mg*.

Volcans de la partie centrale de Java.

Le premier volcan qui se présente maintenant, le *G. Slamat*, s'élève, à environ 100 kilomètres à l'est du Tjerimaï, sur une croupe dont l'altitude est au Tjerimaï de 2000 pieds et au Diëng de 6000 pieds. Entre le Tjerimaï et le Slamat cette croupe paraît être composée uniquement de matériaux sédimentaires; plus loin, sur une étendue de 50 kilomètres, jusqu'au volcan éteint *Rogo Djambangan*, elle serait formée, sur son versant septentrional, de produits éruptifs, et sur sa pente sud de puissants dépôts sédimentaires, inclinés au midi [1]). Les 20

[1]) Junghuhn (*Java*, III, 405) a décrit un de ces dépôts, le G. Poelasari. Entre des couches de grès et de conglomérat, plongeant de 40—50°, se trouve une couche concordante de lave poreuse. Peut-être est-ce un recouvrement local de tuf et de rapilli par des courants de lave, dans lesquels des ruisseaux ont fait de profondes coupures. (*Voir* aussi *Java*, III, 71, 72).

derniers kilomètres, du Rogo Djambangan au Diëng, sont, d'après Junghuhn, d'origine exclusivement éruptive, et le plateau de Karang Kobar, situé sur le versant méridional, consiste probablement en terrain volcanique ancien (*Java*, II, 171, 207—222). Les roches de cette dernière partie ne sont pas représentées dans nos collections; du versant méridional de la croupe entre le Rogo Djambangan et le Slamat, nous possédons les échantillons J. 1217—1225, parmi lesquels il y a 4 andésites. L'un d'entre eux indique des éruptions andésitiques répétées; c'est une brèche pyrogène d'andésite amphibolique à demi altérée et d'andésite pyroxénique intacte.

17. *G. Slamat.* J. 110—123. Basalte. Probablement plus jeune que les coulées d'andésite dont il a été question ci-dessus. Si ce cône possède un noyau d'andésite, celui-ci doit être enseveli presque entièrement sous de puissants épanchements basaltiques, car tous les fragments de lave, les rapilli et les cendres de ce volcan, pris à différentes altitudes et à différents côtés, appartiennent au basalte plagioclasique. Aujourd'hui, il ne rejette que des cendres et des rapilli; antérieurement, il doit avoir donné issue à d'épais courants de lave, comme le Tankoeban Praoe, avec lequel il partage aussi la fréquence de la dévitrification globulitique. Du reste, ses laves sont, en général, plus riches en péridot.

Du Rogo Djambangan ni, malheureusement, du plateau de Karang Kobar, je n'ai pu examiner aucun échantillon.

18. *G. Diëng.* J. 124—131. Andésite pyroxénique et basalte (?). Le Diëng offre le premier exemple de cirques volcaniques, tels qu'il en existe plusieurs dans la partie est de Java. L'extrémité orientale de la chaîne venant du Slamat se recourbe au sud pour former le Goenong Praoe; au sud-ouest et à l'ouest de celui-ci s'élèvent, suivant une ligne arquée, plusieurs cônes imparfaits: le Srodjo, le Pagger tipis, le Wisma et le Nagosarie, probablement des restes du prolongement méridional et occidental du Praoe. Le fond de l'ancien cratère doit avoir eu,

d'après cela, un diamètre de 6 kilomètres, et sur cet espace on trouve plusieurs lacs, une demi-douzaine de solfatares et quatre cratères, le * Pagger Kendang, le cratère double Panggonang et le cratère rompu Pakkoeodjo, actif en 1826 et peut-être aussi en 1847. De ce système volcanique compliqué, qui imite sur une petite échelle le groupe volcanique de Preanger, Junghuhn a donné une carte détaillée et une description circonstantiée. Dans sa collection de roches, il n'y a que le Pakkoeodjo (124—127), un courant de lave inconnu, exploité pour pierre à bâtir (131), et une solfatare appartenant au Panggonang qui soient représentés par des échantillons satisfaisants. M. Lorié en a décrit deux: le N° 124 comme andésite pyroxénique contenant une proportion assez notable de sanidine et un peu de biotite, le N° 131 comme basalte poreux, pauvre en péridot. Dans cette dernière roche, je ne suis pas parvenu à trouver du péridot, même par la voie chimique. Dans le N° 124, au contraire, on peut en déceler un peu, pas assez toutefois pour modifier le caractère franchement andésitique de la roche.

Le N° 126 a beaucoup d'analogie avec le N° 124; les cristaux de feldspath y atteignent aussi près de 1 centimètre de longueur. La pâte est plus riche en magnétite que celle du N° 124. On y trouve quelques grains de péridot non altéré. M. Lorié indique pour le N° 124 une proportion notable de sanidine; dans le N° 126, le nombre des cristaux à polarisation monochromatique est moindre, mais pourtant remarquablement grand, eu égard à la forte réaction du calcium. Pour cette raison, l'examen chimique fut étendu aussi à des éclats feldspatiques isolés de ces roches cristallines à gros grains [1]).

[1]) 2 centigr. de poudre fine furent chauffés pendant 2 minutes avec 8 centigr. d'acide chlorhydrique fumant; la masse desséchée fut humectée de 0,1 centim. d'acide chlorhydrique faible, et de cette solution on préleva, au moyen de pipettes capillaires, des gouttes d'essai. Pour obtenir des termes de comparaison, différents minéraux et roches, de composition connue, furent soumis au même traitement. Parmi les feldspaths, l'oligoclase fut celui qui offrit le plus de résistance à l'attaque.

La roche du Pakkoeodjo est attaquée par $H\,Cl$ aussi fortement que le basalte, et la poudre des fragments de feldspath isolés est décomposée plus d'à moitié. La solution se comportait comme celle du labrador. En vue d'essais ultérieurs, les résidus furent attaqués par $H\,Fl$ et $H^2\,SO^4$; du N° 124 on obtint de cette manière des réactions correspondant à un mélange de sanidine et d'oligoclase; le N° 126 ne donna pas la réaction du calcium, — c'était de la sanidine sodique.

Les deux autres roches du Pakkoeodjo contiennent presque exclusivement du plagioclase, et du verre brun globulitique au lieu d'un feutrage de microlithes; le N° 127 renferme, en outre, un peu de péridot.

J. 128, de la solfatare Kawa Kidang sur le Panggonang, est de l'andésite pyroxénique spumeuse, riche en verre.

19. *G. Sendoro.* J. 133, 135, andésite pyroxénique.

20. * *G. Soembing.* J. 136, andésite pyroxénique, amphibolifère.

La *sanidine* ne donna aucune trace de gypse, nettement *K*, faiblement *Na*.

L'*oligoclase* donna plus de *K* que de *Na*, quelques petites aiguilles de gypse.

Le *labrador* est fortement attaqué; beaucoup de *K* et de *Na*, cristaux de gypse d'une longueur notable sur toute la goutte desséchée.

L'*anorthite* est décomposée totalement; peu de *K*, plus de *Na*, avec $H^2\,SO^4$ immédiatement un feutrage de fines aiguilles de gypse.

Le *pyroxène* de Laach et l'*amphibole* de l'andésite de Stenzelberg donnent beaucoup de *Ca* et de *Fe*. Un second traitement par $H\,Cl$ n'eut presque pas d'action, tandis que la sanidine et le labrador fournissent un troisième et un quatrième extrait. Probablement il y a en jeu des inclusions microscopiques.

Trachyte du Drachenfels: donna plus de *K* que la sanidine, moitié moins de *Ca* que le labrador.

Andésite de Stenzelberg, plus claire: peu de *K*, environ autant de *Ca* que le labrador.

Andésite de Stenzelberg, plus foncée, est fortement attaquée: plus de *K* que le trachyte du Drachenfels et plus de *Ca* que le labrador.

La pâte est manifestement attaquée avec plus de force que les cristaux de feldspath, et sa composition peut différer beaucoup de celle d'un mélange uniforme des minéraux qui s'en sont séparés à l'état cristallin.

Ces deux volcans s'alignent dans la direction sud-est avec le Diëng, et cela à des distances si petites qu'un courant de lave du Sendoro s'est arrêté dans le cratère fracturé Telerrep, sur le versant oriental du Diëng, et que le pied du Sendoro touche à celui du Soembing.

Dans J. 133 prédomine du verre brun, dans les préparations des deux autres échantillons, la pâte est microlithique. J. 135 contient un peu de péridot, J. 136 un peu de hornblende. L'essai chimique montre que les trois échantillons sont faiblement attaqués par *H Cl.* Les solutions renferment relativement beaucoup de *Na*, peu de *K* et de *Ca*. Ainsi, probablement, andésite oligoclasique.

21. * *G. Oengáran.* J. 139—151. Andésite pyroxénique et amphibolique, et basalte.

Le N° 139 est du silex; le N° 141, étiqueté phonolite, est du calcaire cristallin à grains fins.

Des dix autres échantillons, les N°s 142, 144, 151 ont été déterminés par M. Lorié comme des andésites amphiboliques contenant du pyroxène et de la sanidine, le N° 147 comme du basalte. Il rapporte également au basalte le N° 140, à cause de sa ressemblance avec le N° 251, du Tengger. Une masse riche en verre et "déjà fortement transformée en zéolite" (p. 155) devrait, si c'était du basalte, être immédiatement attaquée par l'acide chlorhydrique. Or, l'épreuve faite sur une lamelle polie ne donna qu'une faible corrosion dans des fissures traversant les feldspaths porphyriques. En solution, beaucoup de *Al*, *Ca*, *K*, pas de *Mg*. Ainsi en aucun cas du basalte, plutôt une andésite contenant du labrador et de la sanidine, riche en verre et d'une structure microperlitique spéciale.

Le N° 147 renferme beaucoup de péridot en gros grains cristallins à demi altérés. Il faut en rapprocher le N° 148, dont le péridot est déjà en majeure partie transformé en serpentine. Outre ces deux échantillons, les suivants ont également cédé du magnésium à l'acide chlorhydrique: Nos 143, 132, 149. Ils sont plus voisins de l'andésite que du basalte. Les Nos 142 et

143 ne contiennent, outre le plagioclase, que de l'amphibole et de la magnétite; dans le N° 149, on voit aussi de petits grains et cristaux de pyroxène vert pâle.

Les Nos 141 et 144 sont, comme l'a déjà remarqué M. Lorié, des andésites sanidinifères à texture purement cristalline. Comme minéraux accessoires, il y cite la tridymite et l'apatite, auxquels je puis ajouter (pour le N° 144) de petites masses grises arrondies, qui par leur dichroïsme vif, du gris-jaunâtre au bleu saphir, par la dureté et la polarisation rappellent fortement la cordiérite.

Le N° 150 est une andésite pyroxénique, qui se distingue par des cristalloïdes à bords noirs, de pyroxène, de feldspath et de magnétite, ces derniers, paraît-il, pseudomorphiques d'après le feldspath.

La roche N° 151, entièrement cristalline à gros grains, offrait l'occasion d'examiner séparément la substance feldspathique. Plus des ¾ de la poudre de feldspath soumise à l'essai furent décomposés par une seule évaporation avec $H\,Cl$. En solution: une très grande quantité de Ca, peu de K et de Na. Environ ¼ de la prise d'essai primitive résista même à l'évaporation répétée avec $H^2\,SO^4$; cette portion fut reconnue pour de l'oligoclase contenant de la potasse.

22. * *G. Merbaboe.* J. 152—168. Andésite et basalte. Les Nos 155 et 156, étiquetés phonolite, sont du calcaire divisible en plaques.

Suivant M. Lorié, les Nos 153, 157, 163, 167 appartiennent au basalte; il en est de même, d'après mes notes, du N° 166, riche en péridot veiné de rouge, pauvre en pyroxène.

Le N° 152, de la paroi à demi effondrée du cratère, est de l'andésite pyroxénique; le N° 154, rapilli du sommet de la montagne, est de l'andésite amphibolique scoriacée, riche en verre.

23. *G. Merapi.* J. 169—215*b*. Andésite pyroxénique, andésite amphibolique, mélanges des deux roches, basalte.

De cette longue suite d'échantillons, j'ai pu en examiner 32.

Les Nos 193—215 appartiennent au cône de scories; 169—184, 191 et 192, à la vieille paroi du cratère et au penchant de la montagne; 185—190 à la selle qui, à une altitude de 1600 mètres, unit le Merapi au Merbaboe. Les déjections qui forment cette selle proviennent exclusivement du Merapi (*Java*, II, 390).

Suivant M. Lorié, le N° 172 du pied méridional, les Nos 191, 192 de la paroi du cratère, les Nos 194, 199 et 201 du cône de scories doivent être rapportés au basalte. Dans deux de ces échantillons je n'ai pas pu découvrir de péridot au microscope, dans deux autres je ne l'ai trouvé qu'en petite quantité.

Les résultats de l'essai chimique permettent de rapporter au basalte les Nos 172 et 199; le N° 184 (lave du versant septentrional) se reconnaît aussi pour un basalte riche en verre, extraordinairement compacte et tenace; enfin, la cendre N° 215*b*, en dépit de sa couleur claire, rentre encore dans la même espèce.

Les Nos 191 et 192 sont des andésites péridotifères (?). Toutes les deux ont été exposées à l'action de SO^2, ce qui se décèle par le gypse que laisse déposer leur solution chlorhydrique. Cette circonstance rend incertaine la conclusion au sujet de la présence du péridot. Le N° 194 est également de l'andésite pyroxénique. Le N° 201 laisse distinguer de petits cristaux enrouillés de péridot; il cède aussi à $H\,Cl$ plus de Mg que les échantillons précédents. La poudre des fragments de feldspath extraits de la roche se montra formée d'un mélange de labrador et d'oligoclase.

Le nombre des échantillons basaltiques se réduit d'après cela à 5, soit 15,6 pour cent du nombre total des spécimens examinés.

A l'andésite pyroxénique, M. Lorié rapporte les N°. 169, 170, 171, 163, 200, 204 et 205. Le N° 203 contient beaucoup d'amphibole, le N° 193 autant de péridot que le N° 191. Le feldspath est mélangé: oligoclase et labrador. A ce même groupe andésitique appartiennent aussi les Nos 191, 192, 194, basaltes pour M. Lorié, puis encore: 174, 177 (biotitifère, attaqué par SO^2), 181, 183, 186, 196, 107, 202, 206; en tout, 20 andésites pyroxéniques = 63 pour cent.

Aux andésites amphiboliques de M. Lorié: Nos 175, 185 et 215, je puis ajouter le No 185, ce qui en porte le nombre à 4. Le dernier de ses échantillons, No 188, est de l'andésite pyroxénique-amphibolique. Il faut y joindre les Nos 190 et 203, où la présence de l'amphibole avait échappé à l'observation.

Le nombre total des andésites est donc: 27 = 84,4 pour cent.

. Ces proportions ne sont pas notablement modifiées par les données de M. Verbeek (*Nieuwe ontdekkingen* etc.); en tenant compte de ces données, on trouve: basalte 14,3 °/o, andésite 85,7 °/o. Le contraste est frappant avec le volcan voisin Merbaboe, où, d'après les résultats de M. Lorié et les miens, le basalte et l'andésite sont entre eux dans le rapport de 6 : 2. Malheureusement, je n'ai pu vérifier, en ce qui concerne les basaltes du Merbaboe, toutes les déterminations de M. Lorié. On peut mieux se fier aux indications de M. Verbeek, puisqu'il dit expressément (*l. c.*, p. 18) ne pas classer parmi les basaltes des roches pauvres en péridot. Si l'on fait entrer ces indications dans le calcul, le rapport devient, pour le Merbaboe, basalte 87,5 °/o, andésite 12,5 °/o.

Au Merapi, l'andésite domine tout aussi décidément qu'à l'Oengaran et au Diëng, et elle fournit aussi des déjections ayant la même structure cristalline à gros grains, déjections qui méritent à un haut degré l'attention du pétrographe. M. Lorié traite, assez succinctement, des Nos 175, 187, 188, 215. Dans le No 188, il trouve çà et là des restes de verre entre les cristaux. De la même structure sont les Nos 185 et 189. Les Nos 187 et 215 ont, d'après lui, une base feldspathique, c'est-à-dire que les cristaux porphyriques, consistant ici presque exclusivement en amphibole et magnétite, sont liés par un agrégat de grains de feldspath irrégulièrement conformés. Le No 175 a été fortement attaqué par SO^2 et CO^2; il fait effervescence avec $H\,Cl$, et la solution évaporée donne des aiguilles de gypse; au lieu de magnétite, il renferme de la marcassite. En faisant agir sur lui pendant deux heures SO^2 dissous dans l'acide chlorhydrique étendu, la base feldspathique a été mise aussi

nettement en évidence que dans le N° 187. — Le N° 190 se distingue du N° 188 par sa structure purement cristalline. Avec le N° 186, il a en commun le double aspect sous lequel s'y présente le pyroxène: en gros fragments à coloration intense, verte ou brune, et à texture fibreuse, et en individus plus petits, arrondis, de couleur claire, gris-jaunâtre ou gris-rougeâtre, à biréfringence plus faible. Chacun de ces deux échantillons renferme de l'amphibole; dans le N° 190, on peut la regarder comme un des éléments essentiels. Le pyroxène gris, gutti-forme, du N° 186, enclave une multitude de petits cristaux, ordinairement arrondis, de grenat, qui donnent lieu à la nuance rougeâtre.

Toutes ces roches cristallines à gros grain contiennent en très grande abondance de la magnétite, qui parfois même y prend le rôle de base. On y trouve aussi, comme à l'Oengaran, beaucoup d'apatite. Les N°s 186 et 188 cédèrent un peu de *Mg* à l'acide chlorhydrique. — En fragments, les N°s 185 et 189 semblent ne consister qu'en amphibole et en magnétite disséminée. En poudre fine, on remarque de petites esquilles blanches. Celles-ci ayant été éloignées autant que possible, on évapora deux fois avec HF et H^2SO^4. La première solution du N° 185 donna beaucoup de *K*, *Al*, *Fe*, peu de *Mg*, une trace de *Ca*, et correspondait donc à un feldspath potassique mêlé de magnétite; la seconde solution ne renfermait pas d'alcali, peu de *Ca* et de *Al*, beaucoup de *Fe* et de *Mg*, et appartenait par conséquent à une amphibole à base de magnésie et de fer. Les deux solutions du N° 189 montrèrent une différence non moins frappante: toutes les deux donnèrent beaucoup de *K* et une très grande quantité de *Fe* et de *Mg*, la première, en outre, beaucoup de *Al*; traces de *Na* et de *Ca*. La teneur en potassium de la seconde solution, exempte d'aluminium, est assurément étrange; j'ai vainement cherché à en trouver une explication.

Le N° 186 se désagrège, sous une pression modérée, en grumeaux vert-noirâtre, mêlés d'esquilles blanches et de sable grisâtre. Les premiers, attaqués par *H Cl*, cèdent un peu de

K, *Ca*, *Mg* et beaucoup de *Fe*; décomposés par *H F*, un peu de *K* et de *Na*, beaucoup de *Ca* et de *Fe*, encore plus de *Mg*. L'élément noirâtre du N° 188 se comporta de la même manière. Dans cet échantillon, la moitié des sections pyroxéniques présentaient entre les nicols une extinction droite et une texture finement fibreuse.

Les esquilles blanches du N° 186 se laissèrent décomposer par *H Cl* dans la proportion de $1/_3$; la solution correspondait à du labrador (beaucoup de *Ca*, plus de *K* que de *Na*). Le résidu fut fractionné avec *H F* et $H^2 SO^4$. Première solution : *K* prédominant; seconde solution: *Ca* et *Na* prédominants.

La masse sableuse grisâtre fut dissoute par *H Cl*, sauf un faible résidu vert, qui consistait en un mélange des éléments ci-dessus. La solution chlorhydrique donna une trace de *Mg*, peu d'alcalis, une très grande quantité de *Ca* et de *Al*.

Dans le N° 186, tous les feldspaths paraissent donc exister ensemble. La teneur en anorthite, l'abondance de gros bâtonnets d'apatite et la faible proportion de base vitreuse microlithique marquent à cet échantillon, ainsi qu'au N° 188, sa place à côté des Nos 144, 145, 151, de l'Oengaran.

Dans les Nos 185 et 189, la proportion de calcium s'est tellement réduite, que le bisilicate lui-même est devenu à peu près exempt de calcium. L'amphibole ferro-magnésienne, dans le N° 189, doit-elle être regardée en partie comme remplaçant du péridot? Le dédoublement d'une substance péridotique très ferrugineuse, en bisilicate et magnétite, peut avoir lieu dans les mêmes circonstances que la transformation d'une roche vitreuse en une roche cristalline à gros grain. et il est remarquable que la magnétite, si abondante dans cet échantillon, s'y trouve, en partie, enclavée *dans* les masses irrégulièrement conformées de l'amphibole. L'idée d'une matière première commune pour les déjections basaltiques et andésitiques est contredite par la proportion notable du magnésium dans la partie insoluble de plusieurs laves riches en péridot, telles, par exemple, que J. 15 et 24 du Tankoeban Praoe. Le manque de formes

de passage entre les laves cristallines à gros grain et les laves ordinaires du Merapi m'a fait renoncer à poursuivre la solution de cette question.

24. * *G. Moerio.* Téphrine, leucitite, basalte leucitique. Situé au nord-est de la chaîne volcanique Oengaran-Merbaboe-Merapi, à 90 kilomètres de l'Oengaran, au milieu de terrains plats. Les marais d'eau saumâtre qui s'étendent à son pied méridional font présumer que ce cône a été, il n'y a pas très longtemps, une île volcanique, semblable aux îles Bawean, au nord-est du Moerio, qui sont composées de matériaux analogues, dans lesquels Vogelsang a découvert le premier leucite extra-européen.

Junghuhn n'a pas fait l'ascension du Moerio. M. Verbeek a examiné 12 échantillons de roches de son versant méridional et du cratère accessoire Patti Ajam, situé à son pied sud-est. Il indique, comme roche dominante, la leucitite, avec passages à la téphrine et au basalte leucitique (Verbeek en Fennema, *Nieuwe geol. ontdekk.*). M. J. van Heuckelum, ingénieur des mines, a eu l'obligeance de m'envoyer des échantillons recueillis par lui-même au Moerio. L'un deux (de Tambaq, décrit par M. Verbeek) renferme des leucitoèdres bien conformés, de 11 millimètres de diamètre. C'est une téphrine néphélinifère, qui contient des quantités égales de plagioclase et de leucite. Outre celle-ci, je dois encore à M. van Heuckelum trois autres tephrines et deux leucitites du Moerio.

La téphrine 2, du tombeau sacré sur le penchant méridional, granophyrique, sans pâte nettement tranchée, renferme, outre les éléments de la précédente, du feldspath monocline et un peu de haüyne. Cristaux de leucite relativement assez rares et petits (jusqu'à 0,5 millimètre).

Téphrine 3, caillou roulé, du chemin entre Wedari et Djoego, sur le versant sud. Pâte microlithique à base incolore, dans laquelle sont disséminés des cristaux microporphyriques de plagioclase, de néphéline et de leucite. Parmi les cristaux plus grands, le pyroxène domine.

Téphrine 4. Du versant est; courant de lave, entre Santie

et Panggonan. Structure comme dans le N° 3; composition se rapprochant de celle de l'andésite pyroxénique.

Leucitite 1. Du versant méridional, non loin de la cime Mergo Djambangan. Granophyriqne, sans contraste net entre la pâte et les cristaux porphyriques. Ces derniers dominants.

Leucitite 2. D'un courant de lave dirigé vers le sud-ouest, du côté de Djapan. Se distingue par sa pâte riche en magnétite et par l'hypersthène brun chocolat qui y entre comme élément accessoire. Ces deux leucitites contiennent l'une et l'autre de la néphéline. — Dans toutes les roches du Moerio les essais chimiques ont révélé la présence de l'apatite, le plus dans la leucitite 2, le moins dans la téphrine 4. Toutes renferment aussi du silicate de potassium insoluble dans *H Cl* (indice de la présence de la sanidine), mais, comme l'avait déjà présumé M. Verbeek, jamais en proportion notable.

A l'est de Rembang se trouve une montagne que Junghuhn nomme Argo (sur la carte topographique, G. Lasem), et à l'ouest de celle-ci une éminence allongée, dont l'extrémité forme le cap Lasem, et qui est formée de couches de sable volcanique et de conglomérat trachytique (*Java*, II, 348). Suivant M. Verbeek, la roche est de l'andésite pyroxénique.

La chaîne volcanique centrale, dont il a été question plus haut, paraît s'étendre, en passant par l'Oengaran et le Merbaboe, jusqu'à l'Ardjoeno. De même qu'entre le Tjerimaï et le Slamat s'élève le Rogo Djambangan, de même, dans l'intervalle Merbaboe-Ardjoeno, est indiqué un volcan problématique, probablement éteint, le *Pandan*, à environ 150 kilomètres à l'est du Merbaboe. C'est un cône d'environ 1000 mètres de haut, au penchant nord duquel se trouverait une solfatare (*Java*, II, 471).

Le premier grand volcan qu'on rencontre ensuite, le G. Lawoe (3270 m,), à 80 kilomètres à l'est-sud-est du Merapi, a une situation isolée, de même que son voisin oriental, le Wilis. Avec eux commence la série des volcans isolés de la partie orientale de l'île.

Volcans de la partie orientale de Java.

---

25. *G. Lawoe.* J. 216—220. Andésite pyroxénique et, suivant M. Verbeek, basalte. M. Lorié n'a examiné que la roche J. 218. Il lui trouve une grande analogie avec l'andésite pyroxénique N° 195 du Merapi, dont elle se distinguerait par le nombre plus grand et les dimensions plus considérables des cristaux et par des taches brunes dues à la matière vitreuse. J. 216, du pied occidental de la montagne, m'a offert la même constitution. L'une et l'autre de ces deux roches ont été exposées à l'action de SO^2. Le feldspath y est probablement de l'oligoclase. Les Nos 217 et 219 sont des masses terreuses blanches, des roches kaolinisées, recueillies dans la grande crevasse cratérienne sur le versant sud. De ce point provient aussi le N° 220, masse friable, jaune-soufre. Un examen microscopique de cette roche, altérée, suivant Junghuhn, par des émanations d'acide chlorhydrique, n'était pas praticable. L'essai chimique n'y a indiqué ni *Cl*, ni *S;* comme éléments métalliques, on a trouvé *K*, *Al*, *Ca* et une très grande quantité de *Fe*. La proportion de *Ca* est beaucoup moindre que dans le N° 218, la partie soluble dans *H Cl* a disparu.

M. Verbeek a trouvé au mont Lawoe (et dans ses environs) 15 andésites et 6 basaltes. En additionnant les résultats obtenus de part et d'autre, cela fait, sur 26 roches étudiées, 20 andésites = 76,9 p. c. et 6 basaltes = 23,1 p. c.

26. * *G. Wilis.* J. 221—223. Andésite pyroxénique et andésite amphibolique. Le Wilis est une masse montagneuse isolée, très déchirée, à 70 kilomètres à l'est du Lawoe. Sa structure se laisse ramener, d'après Junghuhn, à deux cratères concentriques (*Java*, 486, 487). Du plus ancien de ces cratères, qui doit avoir eu l'énorme largeur de 17 kilom., il ne reste que la moitié septentrionale, avec un lac, le Telaga Ngebel, à l'extré-

mité ouest de la crête en forme d'arc. C'est de ce point que provient le N° 222, tandis que le N° 221 a été pris au côté est. Le cratère intérieur, d'environ 7 kilom. de diamètre, est fortement crevassé; de sa pointe la plus élevée, le G. Dorowati, est originaire le N° 223 [1]).

Le N° 221 est une lave assez compacte, tachetée de rouge et de gris. La détermination, comme andésite pyroxénique, reste incertaine, à cause de l'état d'altération déjà très avancée de la roche.

Le N° 222 a été décrit par M. Lorié comme une andésite amphibolique sanidinifère. Il parle d'une pâte, qui consisterait presque entièrement en feldspath „modifié" (décomposé?). La roche est indubitablement transformée, plus que M. Lorié ne l'a sans doute soupçonné. Chauffée, elle donne beaucoup d'eau. Bouillie avec l'eau, elle lui cède du *K* uni à du chlore; elle en abandonne encore plus à l'acide acétique. L'acide chlorhydrique en extrait beaucoup de *K* et de *Al*, peu de *Ca*. Le feldspath en cristaux porphyriques est très bien conservé; la pâte doit donc avoir été riche en sanidine et s'être transformée en un hydrosilicate analogue à la pinitoïde, tandis que le *Ca* et le *Na* étaient enlevés.

Le N° 223 ressemble au N° 218 du Lawoe. La question de savoir si l'on a affaire, ici également, à une andésite pyroxénique-oligoclasique sanidinifère ne saurait être tranchée, attendu que la roche a subi une transformation analogue à celle du N° 222. L'indication de Junghuhn, concernant des émanations de gaz chlorhydrique au Telaga Ngebel (*Java*, II, 492), doit donc être étendue aussi au centre du Wilis.

27. *G. Keloet.* J. 224—238. Andésite pyroxénique, andésite amphibolique, mélanges de ces deux andésites et basalte.

Le Keloet est situé, dans la direction est-sud-est, à la même distance du Wilis que celui-ci du Lawoe. Au nord, il touche aux

---

[1]) Junghuhn parle (*Java*, II, 490) de l'effondrement d'un cône central. Voir plus loin, à l'article du G. Ringgit.

contre-forts occidentaux de l'Ardjoeno, à l'est, il se relie avec le Kawi. Le cratère de ce cône, haut de 1660 mètres, paraît être le plus souvent rempli d'eau.

Le plus grand nombre des échantillons de roches ont été détachés de gros blocs, dans une gorge à l'ouest du cratère. Ces échantillons (224—234) ont acquis une certaine célébrité, parce que Junghuhn s'est laissé entraîner par leur aspect cristallin à les déclarer, très formellement, de la syénite amenée des profondeurs. M. Lorié émet l'opinion (p. 203—205) qu'ils ne peuvent en aucun cas être regardés comme de la syénite, qu'il s'agit peut-être d'une modification de lave, devenue cristalline par un refroidissement lent et une „haute pression". Dans le N° 224, induit en erreur par le Catalogue de Junghuhn, il a cherché du zircon. Les Nos 224 et 229 sont décrits par lui comme de l'andésite amphibolique pyroxénifère et sanidinifère, les Nos 225 et 226 comme de l'andésite pyroxénique amphibolifère et sanidinifère. Dans les Nos 224 et 225, il n'y a pas d'apparence de pâte; les Nos 226 et 229 présentent une pâte composée de grains de pyroxène et de feldspath. Dans le N° 224, M. Lorié a trouvé du quartz et, dans le pyroxène, beaucoup d'inclusions vitreuses rougeâtres. Le N° 225 aurait la même compositien Au lieu d'inclusions vitreuses, j'ai trouvé beaucoup de petites bulles de vapeur; au lieu de quartz, du péridot.

Le N° 226 aurait une structure semblable à celle du N° 229. Ici, la grande variabilité de la structure des „syénites" du Keloet se manifeste d'une manière frappante: la préparation du N° 226, que j'ai sous les yeux, est conforme, en ce qui concerne les cristaux disséminés, à la description donnée par M. Lorié, mais elle renferme en outre une pâte finement microlithique, en proportion nullement négligeable.

Ma préparation du N° 229 est, pour une moitié, cristalline à gros grains; l'autre moitié représente une brèche, à ciment feldspathique.

Dans le N° 232 (ressemblant, d'après Junghuhn, à du por-

phyre pyroxénique), les structures des Nos 226 et 229 se confondent, en ce sens que les deux parties hétérogènes sont réunies par une zone de passage, large de 1,5 millim. Il est impossible de décider, avec les matériaux actuellement à notre disposition, si l'on a affaire ici à un échantillon de contact, ou bien si l'andésite amphibolique doit être considérée comme une modification de l'andésite pyroxénique. Pour l'étude de la connexion entre l'amphibole et la magnétite, la préparation est aussi instructive que les andésites du Wajang. Là, le pyroxène et l'amphibole étaient tous les deux incrustés d'oxyde de fer et de magnétite, ou même en étaient entièrement imprégnés. Ici, la coloration en noir est bornée à l'amphibole. L'hypothèse d'une transformation par l'action de la chaleur est contredite, ici comme là, par la présence de coupes pellucides, à côté d'autres qui sont noircies; d'altération par les agents atmosphériques, il ne saurait être question en aucun cas. Les agrégats noirs percés à jour, dentés et incisés montrent ici le clivage de l'amphibole. Il ne s'agit donc pas d'agrégats grenus, comme dans les téphrines du Moerio et dans maints basaltes, mais, en tant que l'amphibole y est impliquée, de masses cristallines à texture régulière. La magnétite paraît s'être isolée sous forme de grains; cela est accusé plus distinctement au bord extérieur du cadre qui entoure le réseau noir que dans les mailles de ce réseau, remplies de bâtonnets d'amphibole. En dehors, le cadre se résout en un nuage de poussière noirâtre, sans qu'une pareille poussière soit répandue uniformément dans la pâte. L'impression qu'on reçoit de la vue de ces productions, c'est que l'amphibole et la magnétite sont nées simultanément du dédoublement d'une masse vitreuse ayant la composition d'un péridot riche en fer. On verra tout à l'heure jusqu'à quel point les résultats de l'étude chimique confirment cette présomption.

La dernière des „syénites" examinées par M. Lorié, le N° 231, qu'il regarde comme de nature doléritique, est pour moi décidément un basalte, de même que le N° 234, à grain un peu plus fin. Tous les deux possèdent une pâte microlithique et

renferment beaucoup de péridot. Dans les Nos 225 et 226, le microscope n'accusait pas la présence du péridot et les réactions chimiques n'en indiquaient qu'une petite quantité. Le No 229 en contient davantage; dans le No 232, la partie pyroxénifère est riche en péridot, la partie chargée d'amphibole en est dépourvue.

Le No 228 montre sur la cassure une composition inégale. Une partie de la roche ne paraît consister qu'en feldspath et en pyroxène d'aspect diallagique, une autre partie, plus petite, a une texture grenue et laisse présumer un mélange de péridot. La roche était malheureusement trop friable pour se prêter à la taille en lame mince. La partie cristalline fut reconnue exempte de péridot, la partie grenue, péridotifère.

Le No 230 possède, à un plus haut degré encore que le No 229, la texture cristalline à gros grains; il est aussi plus riche en amphibole et magnétite, entre lesquelles le feldspath est comme incrusté.

Le pyroxène et l'amphibole de toutes ces roches sont riches en magnésium. A cet élément est associé, dans le No 225, environ ⅓ de *Ca*, qui, circonstance assez singulière, entre plus difficilement en solution. Dans le pyroxène des Nos 226 et 228, beaucoup de *Ca;* dans l'amphibole des Nos 229, 230, 232, à peu près quatre fois autant de *Mg* que de *Ca* et en outre beaucoup de *Fe*, auquel doit être attribuée aussi l'extinction oblique des pyroxènes riches en magnésium des Nos 224 et 225.

M. Lorié indique dans les Nos 224, 225 et 229 la présence de la sanidine, comme élément subordonné. Quand on examine cette question de plus près, un doute s'élève, et l'on se demande si, sous les brillantes couleurs de la polarisation de tension de beaucoup de prétendues sanidines, ne pourraient pas se cacher des stries de mâcles. Sur des lamelles polies des Nos 224, 225, 226, soumises à l'action de l'acide chlorhydrique fumant, une partie du feldspath était toujours corrodée et devenue mate au bout de 1½ heure. Sur le No 225, il se produisit de cette manière des taches de 1½ millim. de diamètre, dont l'ensemble

faisait au moins le ¼ de la totalité du feldspath. Vues au microscope, ces taches présentaient des inégalités en forme de gradins, et ressemblaient à des amas de petits glaçons. Entre les nicols, se montrait la susdite polarisation de tension. Un essai de corrosion locale, à l'aide d'une pipette capillaire, me permit de constater que je n'avais pas affaire à du péridot. La solution chlorhydrique, qui lors de la première attaque avait donné la réaction du *Mg*, était, dans ce second essai, exempte de magnésium; les réactifs y décelaient beaucoup de *Al* et de *Ca*, peu de *K* et des traces de *Na*. Des fragments de feldspath réduits en poudre donnèrent beaucoup plus de *K* et une faible réaction d'acide phosphorique. Le résidu, décomposé par *H F*, donna une très grande quantité de *K*, peu de *Na*, pas de *Ca*. Ainsi, probablement: anorthite, labrador contenant du potassium, et sanidine. Dans le N° 226, on trouva beaucoup plus de *P*. Je doute qu'il y entrât de l'anorthite; les réactions indiquent la présence du labrador, de l'oligoclase et de la sanidine.

L'élément feldspathique du N° 228 se comporta d'une manière inattendue. *H Cl* en décomposa environ 70 %; dans la solution: *Ca* en très grande proportion, peu de *K* et de *Na*. Le résidu fut lavé par décantation, puis bouilli deux fois avec de la potasse et, après un nouveau lavage, avec de l'acide chlorhydrique; attaqué ensuite par *H F* et $H^2 SO^4$, il donna une solution limpide, de laquelle, après évaporation et redissolution, on ne put retirer ni *Ca*, ni *K*, *Na* ou *Mg*. La solution ne contenait que *Al*, en proportion inusitée. A-t-on affaire ici à une roche diallagique-anorthitique, à une espèce de gabbro très récent? Junghuhn décrit (*Java*, II, 662) du diallage à éclat nacré du Keloet, dans l'échantillon N° 14 du musée de Batavia. J'ai déjà mentionné, ci-dessus, que le pyroxène du N° 228 rappelle le diallage et que la partie grenue contient du péridot.

Le N° 229 renferme moins d'anorthite que le N° 225. Le feldspath du N° 230 paraît être de l'oligoclase, accompagné d'un peu de sanidine. Les réactions du N° 232 annonçaient le labrador et la sanidine, mais, à cause de l'inégalité de structure et

de composition de la roche, ce résultat n'a pas grande importance.

Les déjections cristallines à gros grains du Keloet offrent beaucoup de ressemblance avec celles du Merapi (185, 186, 189, 190), de l'Oengaran (144, 145, 161), et du Pakkoedjo (124, 126). Toujours le développement de la structure cristalline à gros grains est associé à une abondante formation de pyroxène, ou d'amphibole, et de magnétite, tandis que le péridot recule et que le feldspath prend une constitution basique. La cause probable de ces relations a été indiquée plus haut, en parlant du N° 232. Ce sont des andésites, issues d'un magma de silicates riche en fer et en magnésie, qui dans des conditions normales de solidification aurait dû donner du basalte; elles sont accompagnées de basalte et présentent, au Keloet, des passages à cette roche.

En ce qui concerne les autres échantillons du Keloet, je puis être bref.

Le N° 233 est une andésite pyroxénique remarquablement claire, fortement dévitrifiée.

Le N° 234 est un basalte (d'après M. Lorié, une andésite); ressemble à N° 231.

Le N° 235, andésite riche en verre, et les N°s 236 et 238, déjections ponceuses, sont des roches oligoclasiques-sanidiniques.

Le N° 237 est un basalte pauvre en péridot et à demi décomposé.

Enfin, mentionnons encore une cendre rejetée le 3 janvier 1864 (v. D. 345). Ce produit le plus récent du volcan ressemble à la ponce J. 236. Le microscope y fait reconnaître du plagioclase, du verre incolore, du pyroxène clair et un peu de magnétite. *H Cl* dissout une petite quantité d'alcalis et de *Ca*, une trace de *Mg* et beaucoup de *Fe*. Elément essentiel du résidu: *Ca*; vient ensuite *Na*; pas de *K*, ni de *Mg*. On peut conclure de là, que la matière est une andésite à base d'oligoclase et de pyroxène.

28. * *G. Kawi.* J. 239—241. Andésite pyroxénique.

Le Kawi a, dans sa structure, de la ressemblance avec le

Wilis. Si l'on se figure celui-ci ramené à la moitié de son diamètre, porté à une fois et demie sa hauteur et tourné de 180°, du nord vers l'ouest, la description qui en a été donnée s'appliquera très bien au Kawi.

La paroi extérieure du cratère du Kawi est partagée, par une dislocation à l'ouest, en un arc septentrional, le G. Bokong, et un arc méridional, le G. Bitrang, à l'extrémité orientale duquel est situé un cratère accessoire, ouvert du côté de l'est. Les enceintes du cratère principal, l'extérieure aussi bien que l'intérieure, sont également ouvertes au côté est, et à l'intérieur de cette dernière se trouve un cône de déjections, sans cratère, le G. Tjemoro kendeng.

Les échantillons de roches proviennent de la partie occidentale de la muraille interne du cratère. M. Lorié rapporte la lave grise compacte N° 239 au basalte, bien qu'il n'y ait pas trouvé de péridot; le N° 240, rouge-brique, poreux, est, suivant lui, de l'andésite pyroxénique. Les échantillons sont, tous les trois, relativement pauvres en grands cristaux; la base de la pâte est incolore. La pâte du N° 239 a une belle structure fluidale, celle des Nos 240 et 241 est troublée par du fer oxydé pulvérulent.

L'essai par *H Cl* a donné pour le N° 240 une trace de *Mg*; du reste, tous les échantillons n'étaient attaqués que faiblement, ce qui indique une andésite oligoclasique.

22. *G. Ardjoeno.* J. 243, 244. Andésite pyroxénique et, suivant M. Lorié, basalte. Ce volcan est situé au nord-est du Kawi; il est uni à celui-ci par la croupe du G. Radjgewesi, au Keloet, par les G. Indorowati, Andjosmoro et Loesonggo, qui, d'après Junghuhn, sont tous d'origine éruptive. M. Stöhr, dans le *N. Jahrb.*, 1864, p. 439, classe l'Andjosmoro, — suivant lui appelé G. Broeboe par les Javanais qui habitent le pays environnant, — parmi les volcans éteints et le décrit comme étant une ruine volcanique colossale, comparable au Ringgit, mais de dimensions encore plus vastes. L'esquisse de carte, jointe à son Mémoire, conduit à identifier le Broeboe avec le

G. Selondo de Junghuhn, dont l'Indorowati est un rameau détaché au sud. Entre le Selondo-Broeboe et l'Ardjoeno, la carte de Junghuhn place un G. Koekoesan; entre le Broeboe et le Keloet, le G. Selo kaki et le G. Selo koerong. Si ceux-ci venaient à être également reconnus pour des montagnes à cratère, l'Ardjoeno et le Keloet seraient unis par une chaîne de volcans anciens et le troisième nœud volcanique de Java, qu'on pourrait dénommer d'après le mont Ardjoeno, ne le céderait guère en importance à celui du Diëng.

Le mont Ardjoeno, avec ses cimes multiples, peut être regardé comme un cratère ouvert au nord, d'un diamètre égal à celui de l'enceinte extérieure du cratère du Kawi, et sur le bord duquel se sont élevés 6 cônes d'éruption plus récents, analogues au Manellawangi sur le bord du cratère du Panggerango, au Telaga Ngebel et au Bitrang sur le bord des cratères du Wilis et du Kawi. C'est d'abord, à l'extrémité nord-est, l'*Indrokilo*, cône à sommet déprimé en cavité; puis, en allant par le sud vers l'ouest: le *Widodarèn*, ouvert à l'est, sommet le plus élevé (3363 mètres); le *Bakal*, qui ressemble à l'Indrokilo; *deux* cratères ouverts au sud, et enfin, à l'extrémité nord-ouest, un cratère ouvert au sud-ouest, le *Walirang*, probablement le plus jeune, avec des fumerolles en pleine activité. Tous ces cônes d'éruption s'élèvent tout au plus à 200 mètres au-dessus de la crête qui les porte. Sur le versant nord, à 10 kilomètres du Walirang, se trouve encore un cône tronqué, le *Penanggoengan*, que Junghuhn (*Java*, II, 69) regarde comme un volcan éteint, ayant eu des connexions avec l'Ardjoeno.

Malheureusement, il n'y a qu'un seul de ces nombreux cratères, le Widodarèn, dont on ait pu, jusqu'ici, étudier des échantillons de roches. Le N° 243 aurait, suivant M. Lorié, une pâte feldspathique peu distinctement différenciée, avec bâtonnets de feldspath, magnétite et microlithes pyroxéniques. La préparation que j'ai sous les yeux (*L M*) ne montre pas de pâte feldspathique, ni de microlithes pyroxéniques; à leur place, je

vois du verre jaunâtre et des fragments de pyroxène, qui dans le N° 244 apparaissent en beaucoup plus grand nombre.

Ni l'une ni l'autre de ces roches n'est fortement attaquée par *H Cl*. Le N° 243 donne une trace de *Mg*; *Ca* et alcalis, dans la proportion d'une roche oligoclasique. Le N° 244 donne plus de *Ca*, quoique pas assez pour une roche labradorique. La manière dont se comportent les cristaux macroscopiques de feldspath mérite une mention particulière. Ils sont complètement décomposés par une évaporation répétée avec *H Cl* et donnent, outre beaucoup de *Ca*, aussi du *Na* et un peu de *K*. D'après cela, les microlithes et les cristaux microporphyriques appartiennent à l'oligoclase, les cristaux macroporphyriques au labrador. M. Verbeek énumère de l'Ardjoeno 3 andésites et 3 basaltes.

30. *G. Semeroe*. J. 246, du sommet de la montagne, andésite pyroxénique.

Ce volcan, le plus élevé de tous les pics de Java (3729 mètres) et dont l'activité n'éprouve que de courtes interruptions, est situé à 50 kilomètres du Kawi, dans la direction du sud-est. Il forme la butée sud-est d'un volcan plus ancien, éteint, dont le *G. Garoe*, d'une altitude moindre, doit être regardé comme le cône d'éruption central (primitif); c'est d'après ce dernier cône que Junghnhn a dénommé le massif qui atteint son point culminant au Semeroe (*Java*, II, 768). Autour du Garoe, à une grande distance de lui, s'étend une paroi de cratère de forme très régulièrement elliptique, le *G. Goembar* (diamètres: 10 et 5 kilomètres), paroi à laquelle manque le tiers sud-est. Par rapport à cette enceinte, le Semeroe est dans la même position que le Widodarèn par rapport à l'enceinte de l'ancien cratère de l'Ardjoeno, ou que le Raon par rapport à l'enceinte de l'ancien cratère du mont Raon-Idjen. Malheureusement, le mont Garoe, que la régularité de sa forme et son état de conservation placent en tête des cirques volcaniques de Java, est entièrement inexploré jusqu'ici. Au nord s'y adosse le mont Tengger, mais on ignore si, entre ces deux masses géographiquement voisines, il existe aussi une connexion géologique.

La lave rapportée par Junghuhn a une base incolore, est riche en feldspath et en magnétite, pauvre en pyroxène. Le péridot y fait complètement défaut. L'acide chlorhydrique en extrait beaucoup de *Ca* et de *Fe*, très peu d'alcali. Sur une préparation corrodée par l'acide, la pâte apparaissait notablement éclaircie. Les feldspaths microscopiques, de même que les plus petits des macroscopiques, n'étaient pas attaqués. Par contre, la corrosion était d'autant plus forte sur les cristaux les plus grands, mesurant jusqu'à 2 millimètres, qui sont fréquemment soudés en druses étoilées. Presque constamment, toutefois, une zone marginale, large de 0,05 à 0,1 millim., avait conservé son poli. Dans plusieurs cristaux l'alternative d'oligoclase et de feldspath décomposable se répétait deux fois, et même, chez l'un d'eux, trois fois. Une corrosion nette pouvait être obtenue en 10 minutes, tandis que le labrador exigeait une heure pour offrir le même résultat. Les noyaux de ces feldspaths du Semeroe sont donc plus voisins de l'anorthite que du labrador.

31. *G. Tengger*. J. 248—271. Basalte et andésite péridotifère.

Dans sa disposition générale, le Tengger a de la ressemblance avec le Diëng, mais il est beaucoup mieux conservé. Une paroi circulaire, composée de bancs de lave et de couches de tuf, qui plongent de 20° vers l'extérieur, enceint le fond d'un cratère, large de 6 kilomètres, sur lequel s'élèvent quatre cônes d'éruption. L'un de ceux-ci, le *Batoek*, est isolé et n'a pas de cratère; les trois autres, le *Widodarèn*, le *Segorowedi* et le *Bromo*, sont des cratères de dimensions décroissantes et dont le plus petit, le Bromo, est encore actif. Ils sont alignés, empiétant en partie l'un sur l'autre, dans la direction du nord-est, correspondant à la grande coupure de l'enceinte du vieux cratère. M. Lorié les croit placés à peu près concentriquement, mais Junghuhn a insisté sur le déplacement du centre d'éruption dans la direction de la grande crevasse de Wonosari (*Java*, II, 861). M. Stöhr compare le Tengger au cratère Kilauea dans l'île d'Owaihi (*Der Vulkan Tengger auf Ost-Java*), et regarde le Semeroe comme une dépendance du Tengger (*Neues Jahrb.*,

1864, p. 439). Le Kilauea est un lac de lave, sur le versant d'un volcan beaucoup plus élevé, le Mouna Loa; un coup d'œil sur la carte de Junghuhn montre le Tengger dans la même relation vis-à-vis du mont Semeroe-Garoe, et dans la description que Junghuhn donne de la région comprise entre le Semeroe et le Tengger (*Java*, II, 93—80) je ne trouve rien qui contredise sérieusement cette assimilation. Par contre, l'opinion énoncée par M. Stöhr me paraît rencontrer une difficulté grave dans l'âge plus avancé du mont Garoe, intercalé entre les deux volcans actifs. Le Tengger n'est pas le volcan le plus ancien, et le Semeroe ne l'est pas davantage; tous les deux sont des dépendances d'un volcan plus grand et plus ancien, le Garoe, des cratères subordonnés, quoique sur une échelle colossale.

Ce groupe volcanique ternaire a surgi sur une parallèle à la fente transversale du nœud de l'Ardjoeno; vis-à-vis de la chaîne transversale Kawi-Ardjoeno-Penanggoengan, il est dans la même relation que la paire de volcans Merapi-Merbaboe à l'égard de la chaîne voisine Soembing-Sendoro-Diëng. En étendue, il égale au moins le mont Ajang et le mont Idjen: l'extension du nord au sud s'élève à 25 minutes géographiques, celle de l'est à l'ouest ne peut pas être beaucoup moindre.

Au Tankoeban Praoe, qui a une situation analogue au bord septentrional de la haute région volcanique de Preanger, le Tengger ressemble par l'épanchement abondant de laves très fluides. Là, de grands champs de lave s'étendent sur le versant nord du volcan; ici, des courants de lave ont coulé dans tous les sens, le plus loin dans la direction de l'est et de l'ouest, où ils s'avancent à 30 kilomètres du bord correspondant le plus voisin du cratère.

M. Lorié a déjà attiré l'attention sur l'abondance des laves basaltiques et sur leur richesse en verre globulitique. Les globulites sont nombreux dans les échantillons J. 248, 251, 262, 263, 264, 265, 266. D'autres, fortement dévitrifiés et où dominent des microlithes pyroxéniques arrondis, ressemblent à la lave du Galoenggoeng (N° 250, de l'enceinte circulaire, N° 261,

de la gorge de Wonosari), quelques-uns rappellent plus ou moins la lave N° 246 du sommet du Semeroe. Dans le sable volcanique du fond du cratère, Junghuhn a trouvé des déjections vitreuses (Nos 253, 257) qu'il désigne sous le nom de laves d'obsidienne. M. Stöhr parle d'une couche d'obsidienne intercalée, à mi-hauteur de la paroi du cratère, entre des couches de conglomérat volcanique. M. Lorié croit que ces roches vitreuses pourraient être nommées tachylite et hyalomélane. Suivant lui, toutes les roches du Tengger sont du basalte, bien que dans trois des échantillons (Nos 259, 261, 264) il n'ait pas trouvé de péridot, et que dans d'autres (Nos 250, 251, 258, 265, 266) il n'ait rencontré que de rares petits cristaux de ce minéral. M. Verbeek remarque avec raison que la constitution de la pâte et la microstructure ne fournissent pas de caractères suffisants pour tirer la ligne de démarcation entre le basalte et l'andésite pyroxénique, et qu'une roche ne devrait être séparée des andésites péridotifères, et appelée basalte, que lorsque le péridot y entre en assez grande quantité pour en former un élément essentiel.

Là où l'inspection microscopique est impuissante à décider la question, l'attaque par *H Cl* doit nous éclairer sur le caractère basique ou acide de la roche, et l'examen de la solution chlorhydrique nous fixer sur son contenu en silicate magnésique soluble. On peut objecter à cela que, sous le nom de hyalomélane, ont été réunis une quantité de verres basaltiques qui ne sont pas décomposés par *H Cl*; d'un autre côté, on peut faire valoir, avec le même droit, que de pareils verres peuvent être rapportés tout aussi bien à l'andésite qu'au basalte (voir les remarques à la fin de l'article consacré au G. Keloet), et qu'ils doivent être attribués à l'andésite aussi longtemps qu'on est réduit à l'examen d'un petit nombre de coupes minces et d'échantillons du plus petit format. J'ai soumis tous les échantillons du Tengger, à l'exception des Nos 269 et 270, à une étude qui pour la plupart a été double, c'est-à-dire, microscopique et chimique, et je n'en ai pas trouvé un seul qui pût

être placé à côté des basaltes typiques du Slamat (J. 110, 112, 114), du Galoenggoeng (v. D. 191) et du Tankoeban Praoe (v. D. 211). La plupart contiennent du péridot, mais montrent néanmoins de l'affinité avec l'andésite pyroxénique. Les N°s 261, 264, 268, tous de la gorge de Wonosari, ne laissent pas distinguer, taillés en lame mince, beaucoup de péridot; toutefois, leur solution dans l'acide chlorhydrique donne une si forte réaction de magnésie, qu'ils doivent être regardés comme du basalte. La même chose s'applique aux N°s 257 et 258, déjections riches en verre. Le N° 263 renferme de grands cristaux intacts de péridot; il en est de même du N° 253, lave d'obsidienne du Bromo, qui n'est pas fortement attaquée par *H Cl*, mais cède pourtant beaucoup de *Mg*, outre un peu de *Ca*. La réaction de la magnésie est plus faible chez le N° 251, de la muraille annulaire du grand cratère; ici le microscope montre encore çà et là quelques grains de péridot enrouillé. Dans les N°s 250 et 248, également de la muraille annulaire, je n'ai pu découvrir de ces grains. L'acide chlorhydrique attaquait modérément ces échantillons, la solution donnait une réaction moyenne de *Mg*, *Ca* et *K*. Ces dernières roches, les plus anciennes de celles que Junghuhn a rapportées du Tengger, sont intermédiaires entre le basalte et l'andésite pyroxénique, andésite que M. Stöhr regarde comme le produit le plus ancien de ce volcan.

Le N° 260, du fond du cratère, a donné peu de *Ca*, une trace de *Mg*.

Le N° 266, de la fracture de Wonosari, fut faiblement attaqué et donna un peu plus de *Mg* que le N° 260. Le résidu se dissolvait presque instantanément dans *HF*, et la solution contenait beaucoup de *Na*, une très grande quantité de *Mg*, peu de *K*, *Ca* et *Fe*, ce qui correspond à une roche oligoclasique contenant du pyroxène riche en magnésium et du verre riche en magnésium.

Le N° 267, du même point, fut peu attaqué, et la solution se comporta comme celle du N° 266. Dans le résidu, il y avait plus de *K*; ainsi, roche oligoclasique sanidinifère. Le N° 271, de l'extrémité inférieure de la grande coulée de lave au nord-

ouest, était attaqué plus facilement. En solution: beaucoup de *Fe*, peu de *Ca* et de *Mg*, trace d'alcalis. De nouveau, solution presque immédiate dans *H F*, ce qui paraît être de règle chez les roches riches en verre; réaction extrêmement forte de *Fe* et de *Mg*, à côté desquels *Ca*, *Na* et *K* apparaissent comme éléments subordonnés. La roche est encore une modification, riche en verre, d'andésite péridotifère.

La plupart des roches riches en verre du Tengger sont peu attaquées par *H Cl*. Une exception est fournie par le N° 261, qui est décomposé au $^{1}/_{3}$, et par les N°s 257, 259, qui sont décomposés à plus des $^{3}/_{4}$. Ces deux dernières roches doivent être regardées comme de la tachylite.

Le feldspath est généralement plus rapproché de l'oligoclase que du labrador. L'anorthite, que M. Stöhr cite au nombre des éléments des laves et des déjections du Tengger, devait être cherchée parmi les cristaux macroscopiques des N°s 253, 256, 269. L'essai par *H Cl* apprit que la composftion de ces cristaux ne diffère pas essentiellement de celle qui vient d'être indiquée pour les feldspaths microscopiques. Des inclusions de verre et de magnétite les font paraître plus basiques qu'ils ne le sont en réalité; néanmoins, ils ne sont pas attaqués aussi fortement que le labrador gris à reflets colorés de l'île St.-Paul, Labrador. De la lave poreuse N° 256, je pus extraire des fragments de feldspath en apparence purs, de 2 millim. de diamètre; j'en rassemblai 0,53 gr., afin de déterminer par une analyse quantitative, au moins pour une des roches, la composition de l'anorthite supposée. Les résultats de l'analyse furent:

$$54{,}2\, Si\, O^2,\ 25{,}0\, Al^2 O^3,\ 10{,}4\ Ca\ O,\ 2{,}2\, Mg\ O,\ 1{,}9\, Fe^2 O^3,\ 8{,}1\, NaO.$$

La proportion de chaux répond à celle du labrador, et de même la proportion d'alumine; celle de la soude est du double plus grande. Dans la coupe mince, les grands feldspaths du N° 256 étaient souillés de pyroxène vert clair, d'un peu de verre et de magnétite. Si l'on défalque le fer, le magnésium et une quantité égale de calcium, comme appartenant au py-

roxène, la proportion d'acide silicique s'élève au-dessus de celle que présente le labrador, et la proportion de chaux est abaissée au-dessous.

32. *G. Lamongan.* J. 272—274. Basalte.

A mi-distance du Tengger et de l'Ajang, à chacun desquels il est relié par une suite de collines, s'élève, sous la forme d'un cône double, de la hauteur du Vésuve, le Lamongan, le plus petit et le plus actif des volcans javanais. La cime nord-est, le *G. Taroeb*, paraît être éteinte. Des échantillons de roches que nous possédons, aucune conclusion ne peut être tirée quant aux matériaux qui composent les couches anciennes de la montagne; ce sont des déjections, représentant la période la plus récente de l'activité volcanique. Le N° 273 ressemble à la lave granophyrique du Galoenggoeng. Dans le N° 274, produit de l'éruption de 1847, on remarque autour des cristaux de péridot une bordure rouge, qui rend à peine croyable que ce fragment de roche n'ait pas encore l'âge de 40 ans. Il doit avoir séjourné longtemps dans le cratère, ou avoir été arraché à sa paroi intérieure. Ce ne peut être une scorie d'une éruption antérieure, qui aurait roulé vers le bas du cône, car il est dit expressément que les échantillons portant le N° 274 sont tombés „de l'air".

Les résultats communiqués par M. Mohl au sujet d'une lave trachytique quartzeuse du Lamongan (*N. Jahrb.*, 1874) m'ont engagé à faire l'essai chimique de la roche riche en verre N° 272, bien que l'abondance du péridot rendît improbable *a priori* qu'elle possédât un caractère acide. Attaquée par *H Cl*, elle lui céda peu d'alcali, beaucoup de *Fe* et d'*Al*, plus de *Ca* que de *Mg*. Le résidu donna peu de *Ca*, très peu de *K* et de *Mg*, plus de *Na*, beaucoup d'*Al* et de *Fe*. Le feldspath paraît être de l'oligoclase, accompagné d'un verre riche en chaux et d'un pyroxène riche en fer. Le caractère de l'ensemble est, en tout cas, fortement basique.

33. *G. Ajang.* J. 275—280. Basalte et andésite pyroxénique.

Sur la carte de Junghuhn, l'Ajang donne l'idée d'un cratère

rompu au côté sud, de forme irrégulièrement ovale et de 15—20 kilomètres de diamètre, sur le bord occidental duquel s'élève un cône d'éruption, l'*Argopoero*, tandis que le versant oriental montre une gorge cratérienne tournée vers le sud, comparable à celle du Galoenggoeng.

D'après la description de Junghuhn (*Java* II, 1072—1088), la crête demi-circulaire, qui constitue la moitié nord-est de la vaste enceinte de l'ancien cratère, présente à son côté interne (concave) un talus en gradins, de pente modérée. La moitié sud-ouest ne paraît pas avoir été visitée par Junghuhn. L'espace entre l'Argopoero et la gorge profonde située au bord sud-est de la montagne forme un plateau descendant en terrasses vers l'est, et dont l'altitude est comprise entre 7000 et 9000 pieds. Dans la gorge en question, Junghuhn trouva des traces d'une solfatare, qui, de même que l'Argopoero, paraissait complètement éteinte. Junghuhn reconnaît lui-même que sa description offre un peu d'obscurité et que le dessin dont il l'accompagne n'est guère plus qu'une esquisse schématique.

Parmi les roches rapportées de son exploration, les Nos 279 et 280 proviennent de l'Argopoero, les Nos 277 et 278 du pied sud-est de la montagne, le N° 276 du pied septentrional, et le N° 275 du Cap *Temboro*; ce cap est, d'après Junghuhn, l'extrémité d'un courant de lave émis par l'Ajang dans la direction du nord-ouest, d'après M. Stöhr, un petit volcan situé à 40 kilomètres au nord-ouest de l'Argopoero.

M. Lorié a déterminé les Nos 275, 276, 278 comme basaltes, le N° 280 comme andésite pyroxénique, semblable à J. 218 du Lawoe. Aux basaltes il faut ajouter, d'après mes notes, le N° 277; aux andésites, le second échantillon de l'Argopoero, N° 279.

Les Nos 275 et 277 sont riches en verre, surtout le dernier. Tous les basaltes de l'Ajang se distinguent par la pénurie relative de pyroxène, surtout les Nos 276 et 278, et par l'abondance du péridot.

L'andésite pyroxénique N° 279 a pour pâte un feutrage

grossier de bâtonnets feldspathiques, entre lesquels il paraît y avoir du verre incolore; l'aspect fortement troublé de la masse, dû à de la magnétite pulvérulente, rend difficile d'acquérir la certitude à cet égard. Entre cette pâte et les petits cristaux microporphyriques de magnétite, les pyroxènes distinctement dichroïques et les plagioclases élégamment striés, il existe un contraste très net.

Une partie du N° 280 a des caractères analogues. Le reste, plus du $1/3$ de la préparation, est riche en verre brun-grisâtre, brun-jaunâtre ou jaune, pauvre en magnétite, et contient des bâtonnets déliés de pyroxène, au lieu des cristaux courts et gros qui existent dans la partie trouble et dans le N° 279. Avec le verre jaune, s'introduit le péridot, en quantité considérable. M. Lorié parle (p. 245) d'une couple d'inclusions arrondies, contenant du verre, qui se trouvent dans sa préparation du N° 280, et qu'il regarde comme des fragments d'une lave, laquelle ne se montre du reste nulle part sur l'Ajang. Il décrit le verre comme étant très finement grenu, mais non globulitique. Tout ce que j'ai vu me fait croire, au contraire, que nous avons ici de vrais globulites, au sens que Vogelsang a donné à ce mot. Les lisérés gris des taches vitreuses se résolvent, sous un grossissement de 1500 fois, en margarites, composés de petits grains de 0,0002—0,0005 millim. de diamètre; des pinceaux et aigrettes de même structure partent de beaucoup de petits prismes de pyroxène et de feldspath, en rayonnant dans la masse vitreuse. Dans le verre jaune, des margarites courbes et des agrégats dendritiques de globulites plus gros prennent la place des fibres droites, rappelant ainsi les scories de haut-fourneau de Siegburg, décrites et figurées par Vogelsang.

Les deux andésites dont il vient d'être question furent à peine attaquées par *H Cl*. Le N° 280 lui abandonna un peu de *Mg*, le N° 279 n'en céda point. Les solutions contenaient, du reste, un peu de *Na*, plus de *Ca* et beaucoup de *Fe*. Les résidus donnèrent peu de *K*, beaucoup de *Na* et de *Ca*, encore plus de *Mg* et de *Fe*.

34. * *G. Ringgit.* J. 258—288. Basalte leucitique, passant à la leucitite et à la téphrine; en outre (provenant d'autres collections) basalte feldspathique.

Le Ringgit, situé au nord-est de l'Ajang, tout près de la mer, a par sa situation, la nature de ses roches et son âge présumé, beaucoup de points communs avec le Moerio. Le nom de Ringgit revient spécialement à la partie septentrionale, escarpée, très crevassée et haute de 1000 mètres, de laquelle de puissantes coulées de lave descendent jusqu'au rivage. La partie restante et la plus grande du rempart elliptique, le Ranoe paraît être beaucoup plus basse. D'après Junghuhn, sa masse méridionale s'élève à peine à 1500 pieds au-dessus du niveau de Bondowoso. L'espace intérieur (fond de cratère?), long de 18 kilomètres et large de 10 kil., est décrit comme un chaos de blocs de roches, couvert de forêts. Personne n'y a pénétré bien loin, et pourtant cet espace doit être exploré avant qu'on puisse décider si le Ringgit est un cirque volcanique, à la manière du Garoe et du Diëng, ou bien, ainsi que le veulent Junghuhn (*Java*, II, 937) et M. Stöhr (*N. Jahrb.*, 1844, p. 436), les restes d'un cône élevé, détruit par explosion ou par effondrement. Junghuhn place l'éruption destructive en l'année 1586, s'appuyant pour cela sur le Journal du navigateur hollandais Corn. Houtman. M. Stöhr a rendu probable que l'éruption, dont parle le garant cité par Junghuhn, est partie non du Ringgit, mais d'un volcan situé au sud-est de celui-ci, le Raon, encore en activité aujourd'hui; néanmoins il persiste à croire à l'effondrement du cône du Ringgit. La hauteur de ce cône hypothétique est estimée par Junghuhn à 8000 pieds, égale à celle du plateau de l'Ajang; la base n'est aussi pas beaucoup plus petite que celle de l'Ajang. Cette masse énorme, pour être amenée par explosion à la forme et à la hauteur réelle du Ringgit, aurait dû être rompue au $^1/_3$ de son élévation et projetée dans l'air, tandis que les exemples connus de volcans éclatés (Panggerango, Galoenggoeng, Papendayang, Diëng, Soembing, Lawoe, Ardjoeno, Boeloeran) montrent un déchire-

ment latéral. M. Stöhr laisse le plateau de l'Idjen se former par voie d'érosion; une pareille hypothèse n'est pas applicable au Ringgit, attendu que, d'après Junghuhn (*Java*, II, 937), „tout le terrain qu'entoure le Ranoe et qui s'étend jusqu'au Ringgit se présente à l'œil comme formé par effondrement ou affaissement à un niveau inférieur à celui du Ranoe". L'immense masse de débris devrait s'être abîmée dans une cavité do 156 kilomètres carrés de surface et d'au moins 1 kilomètre de profondeur, et cette cavité devrait avoir eu exactement la forme d'un cratère, car Junghuhn dit du Ranoe: „cette partie de la montagne forme une crête circulaire, dont le côté convexe est tourné vers le sud; au sud-ouest, au sud, au sud-est et à l'est, elle se relie, par une pente douce et égale, aux plaines de Bondowoso et de Pradjakan, tandis que le flanc concave, septentrional, est beaucoup plus escarpé".

M. Stöhr, en raison de la situation du Ringgit, le suppose en relation avec l'Ajang; l'étude microscopique des laves de ces deux montagnes rend cette hypothèse au moins douteuse.

M. Lorié a examiné les N°s 285 et 287. Le premier est, suivant lui, une téphrine contenant de la sanidine et probablement aussi de la noséane; le second, un basalte leucitique dépourvu de feldspath. M. Rosenbusch (*Ber. d. naturf. Ges. zu* Freiburg i. Br., 1872, p. 35 du tiré à part) décrit une roche qui doit également avoir été leucitifère, mais qui se distingue du premier des échantillons de M. Lorié par une proportion moindre de feldspath et par la présence du péridot.

Mes propres préparations de J. 285 sont constituées encore autrement. Les cristaux de leucite y sont plus grands et plus nombreux que dans celles de M. Lorié, et il s'y joint un peu de haüyne. Le feldspath et la noséane manquent; par contre, il y a du péridot, comme chez M. Rosenbusch. C'est donc du basalte leucitique exempt de feldspath, comme le N° 287. La composition de ce dernier échantillon a été trouvée conforme à la description de M. Lorié.

Dans le N° 288, lave poreuse, mais très tenace, les cris-

taux de leucite sont encore plus gros et plus nombreux. Le feldspath manque, et il en est de même du péridot. Le leucite n'entre pas dans la composition de la pâte, qui est peu abondante; il égale le pyroxène sous le rapport du nombre et du volume des individus, lesquels mesurent jusqu'à 3,5 millimètres; on n'y voit pas de couronnes de grains, pas plus que dans le leucite du Moerio; par contre, la biréfringence y est fortement et régulièrement développée. La noséane se trouve en quantité notable et en cristaux bien conformés, qui atteignent jusqu'à 0,7 millim.; ils sont bordés de noir et souvent, par altération, devenus bruns jusqu'au centre, de sorte qu'on pourrait les confondre avec le péridot. Cet échantillon nous offre donc une troisième modification de la roche leucitique, une leucitite à noséane.

Outre les échantillons de Junghuhn, j'en ai examiné deux qui m'avaient été remis par feu l'ingénieur des mines Jonker, quatre autres dont je suis redevable à M. l'ingénieur des mines J. van Heuckelum, et un de la collection van Diest, v. D. 415.

Le premier des échantillons Jonker est un basalte leucitique néphélinifère; il a de l'analogie avec J. 285. Les cristaux de leucite sont petits, et tellement abondants qu'ils deviennent élément essentiel. De la même nature sont trois des échantillons v. Heuckelum.

Le second échantillon Jonker, le quatrième échantillon v. Heuckelum et v. D. 415 sont des basaltes feldspathiques typiques, riches en péridot. La question de savoir si la pâte microlithique contient du leucite ne pouvait, en l'absence d'inclusions caractéristiques, être résolue que par la voie chimique. v. D. 415 fait effervescence avec l'acide chlorhydrique; peut-être l'arragonite, mentionnée par M. Stöhr, entre-t-elle dans cette lave, probablement la plus ancienne du Ringgit. En même temps que beaucoup de *Ca* et de *Mg*, il se dissout une trace d'alcalis. Le résidu contient, outre une forte proportion de *Mg* et de *Fe*, une quantité moyenne de *Ca*, beaucoup de *Na* et peu de *K*. Le microscope montre de nombreuses sections feldspatiques, non striées, polarisant par taches, et qu'on aurait

prises, en l'absence de tout essai chimique, pour de la sanidine. Le basalte feldspathique de M. Jonker cède à l'acide chlorhydrique une grande quantité de *K* et d'*Al*, ce qui dénote un contenu en leucite; du reste, il se comporte comme v. D. 415.

Avec J. 285, en solution chlorhydrique, j'ai obtenu une forte réaction de *K*, une faible réaction de *Na* et de *Mg*, une trace de *Ca* et de *S*; par là est constatée la présence de la haüyne et du péridot. Dans le résidu, beaucoup de *Ca* et de *Fe*, une quantité extraordinaire de *Mg*, une trace de *Na* et de *K*. Ainsi, pas de feldspath.

J. 288. Dans *H Cl*: beaucoup de *Na*, peu de *Ca* et de *S*, trace de *Mg*. Par conséquent, un peu de péridot à côté de la noséane brune. Le basalte leucitique de M. Jonker donne moins de *Na* et de *Ca*, plus de *Mg*, pas de *S*. Les résidus se comportent comme celui de J. 285. Un pyroxène riche en magnésium et en fer est donc propre à toutes les roches du Ringgit.

Dans l'état actuel de nos connaissances, les roches de Ringgit se partagent en:

Téphrine (Lorié, 285 de la collection de Leyde).

Basalte leucitique { contenant du feldspath (Rosenbusch, coll. Stöhr). dépourvu de feldspath (J. 285 de la coll. de Delft, J. 287, Jonker *a*, v. Heuckelum 1, 2, 3).

Leucitite à noséane (J. 288).

Basalte feldspathique { contenant du leucite (Jonker *b*). dépourvu de leucite (v. D. 415, v. Heuckelum 4).

35. * *G. Boeloeran.* J. 290—292. Basalte et andésite.

Le Boeloeran est un cratère ouvert au côté nord-est, de même altitude que le Ringgit, mais d'un périmètre beaucoup moindre. Sa situation par rapport à l'Idjen est la même que celle du Ringgit par rapport à l'Ajang, circonstance sur laquelle Junghuhn (et après lui M. Stöhr) a déjà attiré l'attention. Les deux cimes ne sont pas unies l'une à l'autre par une suite d'éminences. La bande de terrain qui s'étend entre le Boeloeran et l'Idjeng est dite plate par Junghuhn, qui en estime la hauteur à 50 pieds.

Nonobstant cela, le Boeloeran pourrait, avec plus de raison que le Ringgit, être regardé comme une dépendance de son puissant voisin, car il y a ici similitude réelle entre les produits éruptifs. A la description que M. Lorié a donnée des échantillons du grand champ de lave du versant nord-est, j'ai peu de chose à ajouter.

Les Nos 290 et 291 sont pauvres en verre, tout en ayant une structure fluidale parfaite. Le No 292 contient beaucoup de verre brun, dont les cristaux macroscopiques de feldspath sont comme farcis. Tous les trois sont remarquablement riches en péridot. Il en est de même de l'échantillon examiné par M. Rosenbusch. En ce qui concerne la structure, il y a de l'analogie avec les roches du rempart annulaire du Tengger.

L'essai chimique a conduit à un pyroxène riche en magnésium. Le feldspath a été reconnu pour de l'oligoclase, tant par la teneur en *Na* que par les résultats des expériences de corrosion. A côté du *Na*, le *K* existait en quantité appréciable.

Aux échantillons de Junghuhn sont venus se joindre trois spécimens de roches que m'a envoyés M. van Heuckelum. Deux d'entre eux ressemblent à J. 290 et 291; le troisième est une andésite amphibolique et pyroxénique, ayant l'aspect du basalte. L'amphibole est pénétrée d'une matière pulvérulente noire, comme au Keloet et au Wajang. Elle entre dans la roche en plus grande quantité que le pyroxène.

36. *G. Raon.* J. 281—283. Andésite pyroxénique.

37. *G. Idjèn.* J. 293—295. Andésite pyroxénique et basalte.

Le groupe volcanique auquel appartiennent le Raon et l'Idjèn mérite à un haut degré l'attention, par son étendue, sa structure compliquée et son bon état de conservation. En tant que notre connaissance assez imparfaite de ce groupe nous permet d'en juger, il a dans sa disposition générale beaucoup d'analogie avec le Diëng. Au nord du Praoe s'étend une longue arête demi-elliptique, le *G. Kendeng*, qui à son extrémité ouest porte le *Raon*, à son extrémité est l'*Idjèn*, correspondant respectivement au Pagger kentang et au Pakkoeodjo dans le groupe du

Diëng. Le côté sud, tout comme le côté sud-ouest du Diëng, n'est pas limité par une arête continue et de hauteur uniforme. Entre des éminences en selles s'élèvent, à ce côté sud, deux autres sommets coniques, le *Pendil* et le *Ranté*, dont l'altitude est à peu près égale à celle du Raon et de l'Idjèn et qui paraissent être dépourvus de cratères et éteints. L'enceinte elliptique ainsi constituée renferme, suivant Junghuhn, deux cônes d'éruption plus petits, éteints, le *Pelaoe* et le *Widodarèn*, et deux crêtes annulaires basses, qui peuvent être regardées comme des cratères d'explosion. Sous le rapport des dimensions, toutefois, ce groupe l'emporte beaucoup sur le Diëng, dont le cratère a pu avoir un diamètre de 6 kilomètres, tandis qu'ici nous voyons un cratère long de 25 kilom. et large de 12 kilom., avec des cônes d'éruption de dimensions correspondantes: l'Idjèn, haut de 2400 m., le Raon haut de 3100 m. et ayant un cratère de 1500 m. de diamètre et de 700 m. de profondeur. De ce remarquable cirque volcanique, les seules parties explorées sont le Raon, l'Idjèn et une petite étendue du fond de l'ancien cratère; Junghuhn n'a fait l'ascension ni du Pendil, ni du Ranté, ni, ce qui est très regrettable, du Kendeng. Quant à ce dernier, il se demande (*Java*, II, 1007) si ce ne pourrait pas être une partie de la formation tertiaire, soulevée au côté tourné vers les volcans? A la page 1006, toutefois, il parle du massif entier comme d'un seul foyer volcanique central, en forme de bassin fermé sur tout son pourtour, et dont les cônes d'éruption les plus grands, situés au bord du plateau volcanique, se sont développés en volcans indépendants. Page 990 il se prononce encore plus nettement: „Le Ranté et l'Idjèn forment les deux culées orientales d'une grande masse montagneuse, d'un foyer remarquable, qui s'élève isolément, comme un ensemble de forme tronconique, au-dessus de la plaine. C'est en quelque sorte un volcan composé de plusieurs parties, un volcan principal, dont le bord, qui entoure un plateau central, porte, semblables à des cheminées, quatre volcans coniques particuliers, deux actifs, à l'est et à l'ouest, deux éteints, au sud". En ce

qui concerne le Kendeng, il mentionne seulement que le côté concave est escarpé, tandis que le côté convexe, tourné au nord, s'abaisse en pente douce.

M. Stöhr, qui d'ailleurs n'a visité que l'Idjèn et ses alentours immédiats, se range à l'avis de Junghuhn et s'exprime encore plus catégoriquement que son devancier. Relativement au fond du cratère, le „plateau central" de Junghuhn, il arrive à un résultat assez inattendu: ce fond aurait été primitivement à la même hauteur que le Kendeng et aurait été amené à son niveau actuel par affaissement et par érosion.

Les laves et les déjections solides que ce grand volcan a vomies se sont répandues aussi loin que celles du Semeroe-Tengger. A l'ouest et au nord, les monticules des déjections du Raon touchent à l'Ajang et au Ringgit; à l'est, une coulée de lave de l'Idjèn s'avance jusque dans le détroit de Bali, à une distance de 17 kilomètres; au sud, la lave du Raon a été signalée, par M. Stöhr et par M. Rosenbusch, près de Gambiran et de Rogodjambi, à 33 kilomètres du cratère.

De Gambiran, M. Rosenbusch (*l. c.*, p. 9) a examiné 4 préparations, de Rogodjambi 3. Toutes étaient indubitablement des andésites pyroxeniques, fortement dévitrifiées; plusieurs contenaient de la sanidine, une, aussi de l'amphibole.

Les échantillons de Gradjakan, au nombre de 6, sont, d'après M. Rosenbusch, riches en verre, contiennent beaucoup de sanidine et, tantôt plus, tantôt moins d'un minéral isotrope, que sa structure microscopique et les résultats de l'essai chimique permettent de rapporter à la noséane. M. Rosenbusch range ces échantillons parmi les andésites pyroxéniques, et, à en juger par la description et la figure, c'est évidemment là leur place; quant à savoir s'ils appartiennent, comme le veut M. Stöhr, aux roches du Raon, éloigné de 58 kilomètres, ce point est beaucoup moins certain. La noséane qu'ils renferment éveille des doutes à cet égard, et un coup d'œil sur la carte montre que près de Gradjakan les contreforts méridionaux du Raon rencontrent les contreforts nord-ouest de la presqu'île montagneuse

de Proa. Là pourrait très bien se cacher un volcan analogue au Moerio et au Ringgit, que Junghuhn aurait méconnu comme tel, de même qu'il a méconnu le Lasem et le Temboro, qu'il figure comme promontoires rocheux et décrit comme étant probablement des coulées de lave du Pandan et de l'Ajang.

Aux andésites de Gambiran se rattachent deux des échantillons du cône du Raon, J. 282 et 283, le premier compacte, aphanitique, tacheté de rouge et de noir, le second couleur de rouille, ponceux, tous les deux détachés de gros blocs gisant au bord du cratère. Ils sont composés essentiellement d'une pâte troublée par des globulites incolores, des microlithes feldspathiques très fins, de la magnétite pulvérulente et, dans la variété rouge, par des sphéroïdes minuscules et des lamelles de fer oligiste. Cette pâte, dont la base incolore se distingue difficilement, ne renferme, dans le N° 282, que des cristaux microporphyriques de feldspath, produisant en partie la polarisation monochromatique; dans le N° 283, il y a en outre quelques fragments de pyroxène et, çà et là, une tache jaune pouvant être regardée comme de nature serpentineuse.

L'essai chimique a donné pour résultat que le N° 282 se rapproche du trachyte à base d'oligoclase et de sanidine, tandis que le 283 est une andésite oligoclasique péridotifère. Tous les deux contiennent beaucoup de silicate magnésique insoluble dans *H Cl*; le N° 283 est presque dépourvu de *Ca*.

M. Lorié n'a examiné qu'une roche du flanc septentrional du Raon, J. 281, qu'il déclare être du basalte. La pâte ressemble aux plages noires du N° 282; le feldspath y est disséminé en assez grande quantité, le pyroxène peu abondant, le péridot rare. *H Cl* dissout beaucoup de *Fe*, peu de *Ca* et de *Mg*, une trace de *Na*. Dans le résidu, *Na* et *Mg* prédominent par rapport à *K* et à *Ca*. M. Rosenbusch remarque, à propos des andésites de Gambiran et de Rogodjambi, qu'elles présentent un aspect anomal, basaltique; cette remarque est également applicable aux échantillons du Raon, de la collection Junghuhn.

Du cratère attenant, le *G. Koekoesan*, au nord-est du Raon, rien n'est connu, sauf le nom et la position.

L'Idjèn et ses alentours immédiats ont fourni à M. Rosenbusch 8 andésites pyroxéniques et 2 basaltes. La roche du cône à cratère de l'Idjèn (appelé Widodarèn par M. Rosenbusch) ne laisse distinguer, dans une masse grenue et à demi dévitrifiée, outre des microlithes feldspathiques et de petits grains de pyroxène, qu'un petit nombre de cristaux macroscopiques de plagioclase. Au lieu de magnétite, on y voit souvent de l'oligiste métalloïde. Un élément inattendu est la haüyne, en grains clairsemés. La roche contenait 60 p.c. de $Si\,O^2$. — Deux autres andésites de la cavité du cratère étaient riches en verre brun; l'une (Stöhr 426) doit avoir été voisine de l'obsidienne. Un échantillon de Soengei Paït était presque identique à la roche du cône, un autre renfermait, outre le pyroxène, de l'amphibole. Le dernier des spécimens andésitiques, de Djaga Ambenda, se distingue par l'absence du pyroxène.

Junghuhn n'a rapporté du cône à cratère qu'une cendre de l'éruption de 1817 (J. 296), qui appartient à l'andésite péridotifère.

A J. 294, de la gorge du Banjoe Linoe, au flanc oriental, est applicable la description que M. Rosenbusch a donnée de la roche du cône à cratère.

Le N° 295, au contraire, de la cascade du Banjoe Paït (Soengei Paït chez M. Rosenbusch), vis-à-vis de celui des deux cratères d'explosion qui se trouve à l'est, n'a rien de commun avec les échantillons du Soengi Paït examinés par M. Rosenbusch; c'est un basalte à pâte fluidale grossièrement microlithique, lequel, en tant qu'une description permet d'en juger, est analogue au basalte, étudié par M. Rosenbusch, de la selle Ongop-Ongop, entre l'Idjèn et le Ranté. Les points d'où ces deux échantillons proviennent ne sont pas très éloignés l'un de l'autre, et il est possible qu'ils appartiennent à la même coulée basaltique de Kawa Idjèn. — Le second des basaltes de l'Idjèn étudiés par M. Rosenbusch (chez lui, le premier) est aussi représenté dans la collection Junghuhn, par le N° 293, du cap Batoe toetoel

dans le détroit de Bali (Batu Dodol, chez Rosenbusch); extrémité d'une coulée de lave descendue du Merapi, le cône éteint oriental de l'Idjèn. Cette roche est, sous plusieurs rapports, des plus intéressantes.

Junghuhn l'appelle basalte: à part le N° 271, du Tengger, le seul spécimen de basalte volcanique à Java. Le N° 293 est très cassant, sujet à se désagréger en petits fragments imparfaitement cubiques, et présente une teinte bleue ou ocreuse sur les surfaces de cassure; le N° 271 a une cassure conchoïdale esquilleuse, noir grisatre, et est incomparablement plus compacte et plus dur.

M. Rosenbusch a examiné 3 variétés (Stöhr 460, 464, 465) qu'il regarde comme des basaltes, en se fondant sur l'abondance du péridot dans les N°s 460 et 464. Le N° 464 ne contenait que peu de pâte, et celle-ci était devenue grenue par dévitrification. Le N° 460 contenait beaucoup de verre brun-jaunâtre pâle, parsemé d'innombrables aciculés et corpuscules cristalloïdes vert-bleuâtre, ainsi que de microlithes oligoclasiques produisant une belle structure fluidale. Dans les fissures, la roche faisait effervescence avec les acides.

M. Lorié attribue à J. 293 une structure très finement grenue, sans contraste entre une pâte et des éléments disséminés. La pâte serait composée de verre brun, de gros globulites, de grains et petits prismes de pyroxène, de baguettes de plagioclase et de petits cristaux de magnétite, et elle ne se distinguerait du N° 295 que par le volume moindre des grains.

Les premières préparations obtenues de l'échantillon de la collection de Delft faisaient penser à une variolite. On y trouve, comme élément prédominant, des sphéroïdes (0,004 à 1,2 millim.) de couleur brun de cuir ou, plus rarement, vert-bleuâtre, dont la distribution s'adapte généralement à l'arrangement fluidal des microlithes feldspathiques. Là où la pâte renferme peu de ces sphéroïdes, elle est jaune chamois pâle; là où ils se multiplient, la pâte devient plus foncée et prend une structure fibreuse, résultant — comme on le voit au bord des grands cristaux de

feldspath, où la pâte se termine en coin, — de la juxtaposition de filaments jaune pâle et de filaments brunâtres. Les microlithes de feldspath et de pyroxène ne pénètrent jamais dans les sphéroïdes. Ceux de ces noyaux qui ont des dimensions un peu grandes sont limités du côté de la pâte par des contours doubles, et les plus grands quelquefois aussi par des fêlures en arc, qui suivent le contour; souvent, en outre, ils montrent à leur intérieur des fentes béantes.

Dans la première partie de mes „Contributions à la pétrographie de l'Archipel indien" (*Verh. der Kon. Akad. v. Wetensch.* te Amsterdam, 1883), j'ai figuré, Pl. I, fig. 8, une roche d'une structure à peu près semblable à celle qui vient d'être décrite. La coloration verte, la texture fibreuse rayonnée et l'existence de fines fentes entre les sphéroïdes m'avaient fait admettre alors qu'ils s'étaient formés par infiltration dans des cavités, et pendant longtemps je me suis efforcé d'étendre cette explication à la roche de l'Idjèn. Un examen minutieux des cristaux de plagioclase, mesurant jusqu'à 2,5 millim., qui, dans une de mes préparations, se trouvaient entre un nombre égal de gros pyroxènes et quelques fragments de péridot, m'a engagé dans une autre voie. Outre des inclusions de verre brun chocolat, contenant des bulles, ces cristaux présentaient des inclusions, sphéroïdales ou se rapprochant quelquefois de la forme du feldspath, de la substance jaune-brunâtre, plus rarement aussi de la substance vert-bleuâtre; ces dernières inclusions ne contenaient *jamais* une bulle et n'avaient aucune communication avec la pâte. Il résultait de là, en premier lieu, que les sphéroïdes de la pâte ne sont formés ni par remplissage, ni par concrétion, mais que ce sont des corps étrangers, arrachés à l'état solide, probablement sous forme de grains ou de fragments, à une roche voisine; en second lieu, que, depuis leur empâtement par la lave microlithique, ils n'ont subi aucune altération sensible, mais que dès l'origine ils étaient, les uns colorés en jaune-brunâtre, les autres en vert-bleuâtre.

Lorsque j'eus exécuté un plus grand nombre de préparations,

je trouvai, entre les sphéroïdes, des fragments anguleux et plus gros de la substance brune, fendillés en divers sens et arrondis aux angles. Leurs caractères optiques et chimiques s'accordaient avec ceux de la roche palagonitique de Tji Boeajah (J. 708), où les substances brune et verte sont juxtaposées, tantôt en masses sans structure définie, tantôt en agrégats botryoïdes, enclavant des fragments de roche microlithique. Des éclats minces de cette substance fondent, au rouge vif, en un verre vert-brunâtre. — D'après cela, je pense maintenant que des débris d'une tachylite friable, en voie de transformation en palagonite, ont été enveloppés par une lave andésitique riche en verre, où ils se sont réduits en fragments plus menus et ont été arrondis par fusion ou par usure.

Les observations et considérations qui précèdent se laissent appliquer très naturellement à d'autres roches amygdaloïdes. Je me bornerai ici à quelques brèves indications. L'altération des sphéroïdes, sous l'influence des agents atmosphériques, commence par l'hydratation, dont un accroissement de volume est la conséquence directe. Par suite de cet accroissement, les fentes qui existaient dans les sphéroïdes se ferment, puis, le processus continuant, il se produit un fendillement dans la pâte, lequel, nécessairement, suivra d'abord les lignes qui joignent entre eux les sphéroïdes les plus gros. L'observation des basaltes nous apprend que les produits de l'altération de ces roches ont beaucoup d'analogie avec le produit vert, fibreux-radié, de l'altération du pyroxène (Zirkel, *Basaltgesteine*, *über die Grundmasse des Anamesits von* Steinheim). Là où la substance tachylitique était distribuée en fibres entre des amas de sphéroïdes, l'altération devait produire dans la pâte une coloration fibreuse en vert, et ainsi se trouve complétée la transformation de l'aspect de J. 293 en celui dont il a été question plus haut.

Ces hypothèses ont encore été contrôlées par quelques essais chimiques. En premier lieu, j'ai constaté, en corrodant par les acides la surface des préparations taillées, que l'acide acétique et, avec beaucoup plus de rapidité, l'acide chlorhydrique blan-

chissent les sphéroïdes bruns et verts; en même temps, on remarque un dégagement continu de gaz, qui trahit l'existence d'étroites fissures. Après 3 heures d'action de l'acide chlorhydrique, les parties fibreuses de la pâte étaient également décolorées et ramollies, tandis que les plages jaune clair et grisâtres ne montraient encore, au bout de 24 heures, aucun changement.

La poudre de J. 293 était brun-jaunâtre, mêlée de grains noirâtres durs, qui, broyés à part, laissaient une trace gris clair. Ces grains étaient sensiblement anhydres; la poudre jaune donnait un abondant dépôt d'eau.

L'acide acétique dissolvait la substance jaune, en laissant une poudre noirâtre. Dans la solution: beaucoup de *Na*, *Ca*, *Mg*, *Al;* en proportion moindre, *K* et *S*, très peu de *Fe* et de *Cl.* Le chlore et l'acide sulfurique pouvaient être décelés aussi dans un extrait aqueux; le premier est probablement dû à de l'eau de mer retenue dans les fentes capillaires; quant à l'acide sulfurique, il me semble douteux qu'il puisse en totalité être rapporté à la même origine.

L'acide chlorhydrique laissait, comme résidu, une poudre lourde, gris clair. En solution: beaucoup de *Ca*, une très grande quantité de *Mg* et de *Fe*, peu d'alcali. Dans le résidu: beaucoup de *K*, de *Ca*, de *Fe*, peu de *Na*, une très grande quantité de *Mg.*

Le résidu gris clair correspond, d'après les résultais des essais de corrosion, à la pâte vitreuse microlithique et aux cristaux disséminés de feldspath et de pyroxène. La forte proportion de *K* annonce l'andésite; la grande quantité de *Mg* doit être attribuée, comme au Raon et au Ringgit, à du pyroxène très magnésien.

L'étude microchimique de la roche palagonitique J. 708, du Tji Boeajah, a donné des résultats presque identiques. Là, le mélange de palagonite, de tachylite et d'andésite péridotifère se trouve en blocs à angles aigus dans un conglomérat volcanique, — ce qui s'accorde avec les vues émises par M. Rosenbusch (*N. Jahrb.*, 1872, p. 152); à l'Idjèn, le gisement paraît

être tout autre. La première idée qui se présente est celle de concrétions dans une coulée de verre basaltique; mais la plupart des observations ci-dessus communiquées sont contraires à cette hypothèse, et si l'on essaie de combiner les résultats obtenus par M. Lorié et M. Rosenbusch avec les miens, on est ramené directement à l'opinion de M. Rosenbusch sur le gisement de la tachylite. La roche de Batoe toetoel est une brèche pyrogène, comparable, quant à la composition, à J. 105, de la cime du Tjerimaï: débris basaltiques cimentés par une lave andésitique riche en verre.

(Voir Tableau, p. 224).

Tableau récapitulatif.

Pajoeng	Lipar. 2.
Liman	Lip. 2, Dac. 2, And. 2.
Kiaragoena	And. 1, Bas. 1.
Alimon	Lip. 3.
Karanggoea	Trach. 1.
Mesigit	Bas. 3.
Poelasari	And. 4 (1 périd.)
Nicolaaspunt	And. 1.

	Andésite.	Basalte.
Salak	6(2 périd.)	—
Gedé	5 (périd.)	3
Panggerango	—	1
Boerangrang	—	1
Tankoeban Praoe	—	16
Boekit Toenggoel	—	1
Patoea Amph.	4	2
Kawa Tjiwidaï	2 (périd.)	—
Malawar	3	
Wajang Amph.	7 (périd.)	1
Goentoer	—	4
Papandaijang	—	6
Telaga bodas	2	—
Galoenggoeng	—	4
Tampomas Amph.	1	1
Tjerimaï	3	1
Slamat	—	13
Diëng	5 (périd.)	1?
Sendoro	2 (périd.)	—
Soembing Amph.	1 (périd.)	—
Oengaran Amph.	7(2 périd.)	2
Merbaboe Amph.	2	5
Merapi Amph.	27(3 périd.)	5
Moerio Leuc.	6	—
Lawoe	3	—
Wilis Amph.	3	—
Keloet Amph.	11 (périd.)	3
Kawi	3	—
Ardjoeno	2	—
Semeroe	1	—
Tengger	10(5 périd.)	5
Lamongan	—	3
Temboro	—	1
Ajang	2 (périd.)	3
Ringgit Leuc.	2	7
Boeloeran Amph.	1 (périd.)	5
Raon	3(2 périd.)	—
Idjèn	2	2
	126	96

En ajoutant les échantillons exan nés par M. Verbeek et par M. Rose busch, on a:

andésite 183, basalte 118,

ou, en tant pour cent:

andésite 61, basalte 39.

D'après M. Verbeek, on a trouvé Sumatra (97 échantillons, de 11 v cans):

andésite 92 °/₀, basalte 8 °/₀.

Une différence du même genre exi entre les volcans de la partie centr de Java et ceux de la partie orienta du Salak au Diëng, on compte:

andésite 38, basalte 52 °/₀;

du Diëng à l'Idjèn:

andésite 70, basalte 30 °/₀.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LES EQUATIONS DU MOUVEMENT

DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE,

CONSIDÉRÉES EN RAPPORT AVEC LA THÉORIE DE MAXWELL,

PAR

C. H. C. GRINWIS.

---

1. Il est à un haut degré probable que la propagation de l'action électrique, aussi bien dans un milieu complètement isolant que dans un milieu à conductibilité imparfaite, doit être expliquée par l'apparition de courants électriques dans les éléments de l'espace à travers lequel cette propagation s'opère. Représentons, relativement à trois axes x, y, z perpendiculaires èntre eux, par u, v, w les composantes d'un pareil courant, de sorte que ces dernières grandeurs expriment les quantités d'électricité qui passent, dans l'unité de temps, à travers l'unité de surface perpendiculaire à ces axes.

Si les composantes de l'action magnétique d'un semblable courant fermé, en un point quelconque de l'espace, sont désignées par α, β, γ, on a, pour la relation entre ces forces magnétiques et les composantes de l'intensité du courant, le système connu d'équations

$$
\left.\begin{aligned}
4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\
4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\
4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)
$$

Les quantités α, β, γ elles-mêmes sont exprimées par les équations

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) \\
\beta &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \\
\gamma &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right),
\end{aligned}
$$

où μ représente le pouvoir inducteur magnétique, tandis que F, G, H indiquent les composantes du moment électromagnétique.

De (1) et (2) se déduit le système d'équations

$$
\begin{aligned}
-4\pi\mu u &= \frac{d\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)}{dz} - \frac{d\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)}{dy} \\
-4\pi\mu v &= \frac{d\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)}{dz} \quad \ldots \quad (3) \\
-4\pi\mu w &= \frac{d\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)}{dy} - \frac{d\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)}{dx}
\end{aligned}
$$

2. Si P, Q, R sont les composantes de l'action électromotrice, K le pouvoir inducteur spécifique, C le coefficient de conductibilité, on a pour les composantes du courant les relations:

$$
\begin{aligned}
u &= C P + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt} \\
v &= C Q + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\
w &= C R + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}
\end{aligned}
$$

Les premiers termes du second membre représentent, en vertu de la loi de Ohm, les courants électriques qui naissent dans le milieu plus ou moins conducteur; les seconds termes du second membre donnent les expressions correspondantes pour la polarisation électrique qui se produit dans le milieu; ils désignent les „courants de déplacement" de Maxwell.

Lorsque le milieu n'a pas de mouvement propre et qu'on néglige l'électricité libre du milieu, laquelle est sans influence sur les phénomènes dont il s'agit ici, les composantes P, Q, R sont dans une relation très simple avec les composantes F, G, H.

Nous avons, en effet,

$$
\begin{aligned}
P &= -\frac{dF}{dt} \\
Q &= -\frac{dG}{dt}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\
R &= -\frac{dH}{dt}
\end{aligned}
$$

par suite, les équations (4) donnent:

$$
\begin{aligned}
-4\pi\mu u &= \mu K \frac{d^2 F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} \\
-4\pi\mu v &= \mu K \frac{d^2 G}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dG}{dt} \quad \ldots\ldots (6) \\
-4\pi\mu w &= \mu K \frac{d^2 H}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt}
\end{aligned}
$$

3. Pour le mouvement qui se produit, à la suite d'une perturbation électrique, dans un champ électromagnétique possédant à la fois un pouvoir de polarisation K et l'aptitude à conduire les courants électriques, c'est-à-dire une conductibilité C, les relations (3) et (6) fournissent maintenant les équations:

$$\mu K \frac{d^2 F}{d t^2} + 4 \pi \mu C \frac{d F}{d t} = \frac{d\left(\frac{d F}{d z} - \frac{d H}{d x}\right)}{d z} - \frac{d\left(\frac{d G}{d x} - \frac{d F}{d y}\right)}{d y}$$

$$\mu K \frac{d^2 G}{d t^2} + 4 \pi \mu C \frac{d G}{d t} = \frac{d\left(\frac{d G}{d x} - \frac{d F}{d y}\right)}{d x} - \frac{d\left(\frac{d H}{d y} - \frac{d G}{d z}\right)}{d z} \quad \ldots (7)$$

$$\mu K \frac{d^2 H}{d t^2} + 4 \pi \mu C \frac{d H}{d t} = \frac{d\left(\frac{d H}{d y} - \frac{d G}{d z}\right)}{d y} - \frac{d\left(\frac{d F}{d z} - \frac{d H}{d x}\right)}{d x}$$

En posant $\frac{1}{\mu K} = i^2$ et $\frac{4 \pi}{K} = r$, on a:

$$\frac{d^2 F}{d t^2} + r C \frac{d F}{d t} = i^2 \left(\frac{d\left(\frac{d F}{d z} - \frac{d H}{d x}\right)}{d z} - \frac{d\left(\frac{d G}{d x} - \frac{d F}{d y}\right)}{d y} \right)$$

$$\frac{d^2 G}{d t^2} + r C \frac{d G}{d t} = i^2 \left(\frac{d\left(\frac{d G}{d x} - \frac{d F}{d y}\right)}{d x} - \frac{d\left(\frac{d H}{d y} - \frac{d G}{d z}\right)}{d z} \right) \quad \ldots (8)$$

$$\frac{d^2 H}{d t^2} + r C \frac{d H}{d t} = i^2 \left(\frac{d\left(\frac{d H}{d y} - \frac{d G}{d z}\right)}{d y} - \frac{d\left(\frac{d F}{d z} - \frac{d H}{d x}\right)}{d x} \right)$$

Le développement des seconds membres donne, si l'on pose

$$\frac{d F}{d x} + \frac{d G}{d y} + \frac{d H}{d z} = I$$

et que Δ^2 désigne l'opération connue,

$$\frac{d^2 F}{d t^2} + r C \frac{d F}{d t} = i^2 \left(\Delta^2 F - \frac{d I}{d x}\right)$$

$$\frac{d^2 G}{d t^2} + r C \frac{d G}{d t} = i^2 \left(\Delta^2 - G \frac{d I}{d y}\right) \quad \ldots\ldots (9)$$

$$\frac{d^2 H}{d t^2} + r C \frac{d H}{d t} = i^2 \left(\Delta^2 H - \frac{d I}{d z}\right)$$

Telles sont, dans leur forme la plus simple, les équations du mouvement en question, pour le cas d'un milieu imparfaitement polarisant et conducteur, cas dont Maxwell ne s'est pas spécialement occupé dans sa théorie de la lumière et que nous voulons examiner ici de plus près.

Si l'on différentie les équations (9) respectivement par rapport à x, y et z, on trouve, après addition, que les variations de I sont déterminées par l'équation

$$\mu K \frac{d^2 I}{d t^2} + 4 \pi \mu C \frac{d I}{d t} = 0$$

ou, sous forme symbolique,

$$\mu \left(4 \pi C + K \frac{d}{dt}\right) \frac{d I}{d t} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Il en résulte que, dans le cas où le milieu isole complètement, c'est-à-dire où $C = 0$, on a $\frac{d^2 I}{d t^2} = 0$, par conséquent $I = A + Bt$. S'il s'agit donc d'étudier la perturbation d'un milieu parfaitement isolant, laquelle, comme on le verra plus loin, est *périodique*, on peut supprimer le terme contenant I; autrement dit, on peut admettre que les composantes F, G, H du moment électromagnétique satisfont à la condition

$$\frac{d F}{dx} + \frac{d G}{d y} + \frac{d H}{d z} = 0.$$

Les équations (9) se transforment alors en

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{d t^2} &= i^2 \Delta^2 F \\ \frac{d^2 G}{d t^2} &= i^2 \Delta^2 G \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11) \\ \frac{d^2 H}{d t^2} &= i^2 \Delta^2 H \end{aligned}$$

4. Arrêtons-nous, toutefois, plus particulièrement aux équations (8); celles-ci donnent pour le cas d'isolement parfait, ou de $C = 0$, après transposition des termes du second membre, les remarquables relations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 F}{d t^2} &= i^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d F}{d y} - \frac{d G}{d x}\right)}{d y} - \frac{d\left(\frac{d H}{d x} - \frac{d F}{d z}\right)}{d z} \right\} \\
\frac{d^2 G}{d t^2} &= i^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d G}{d z} - \frac{d H}{d y}\right)}{d z} - \frac{d\left(\frac{d F}{d y} - \frac{d G}{d x}\right)}{d x} \right\} \\
\frac{d^2 H}{d t^2} &= i^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d H}{d x} - \frac{d F}{d z}\right)}{d x} - \frac{d\left(\frac{d G}{d z} - \frac{d H}{d y}\right)}{d y} \right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (12)$$

Elles concordent entièrement avec les équations des petits mouvements intérieurs d'un corps solide à élasticité constante (*voir* Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'Elasticité des corps solides*, 11e Leçon, N° 60), dans le cas où il ne se produit pas de dilatation. Nos équations (12) indiquent donc, de même que celles de la théorie de l'élasticité, des vibrations sans variations de densité, perpendiculaires à la direction de propagation (vibrations transversales).

Leur vitesse de propogation est $i = \frac{1}{\sqrt{\mu K}}$, vitesse pareille, comme l'a montré Maxwell, à celle avec laquelle la lumière se transmet dans le milieu isolant. Nous désignerons cette vitesse de propagation des mouvements transversaux, qui est évidemment la vitesse de translation des „courants de déplacement" de Maxwell, par V_i, de sorte que

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

5. Dans le cas où le milieu conduit parfaitement, c'est-à-dire,

n'est pas susceptible de polarisation, K, le pouvoir inducteur spécifique, devient *nul*, et les équations du mouvement se transforment en:

$$4\pi\mu C\frac{dF}{dt}=\Delta^2 F-\frac{dI}{dx}$$

$$4\pi\mu C\frac{dG}{dt}=\Delta^2 G-\frac{dI}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$4\pi\mu C\frac{dH}{dt}=\Delta^2 H-\frac{dI}{dz}$$

ou, si nous admettons que les composantes F, G, H satisfont à la condition

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0,$$

en:

$$4\pi\mu C\frac{dF}{dt}=\Delta^2 F$$

$$4\pi\mu C\frac{dG}{dt}=\Delta^2 G \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$4\pi\mu C\frac{dH}{dt}=\Delta^2 H,$$

équations de même forme que celles données par Fourier pour la propagation de la chaleur dans les corps solides.

6. Afin de découvrir quelles sont les conséquences d'une perturbation périodique dans un milieu possédant aussi bien l'aptitude à conduire l'électricité qu'à produire la polarisation électrique, dans un milieu, par conséquent, pour lequel C et K ont tous les deux des valeurs finies, il convient d'examiner de plus près le cas où une onde électrique plane se propage dans ce milieu, suivant une direction que nous ferons coïncider avec l'axe des x.

Toutes les quantités qui se rapportent à ce cas étant des fonctions de x et de t, indépendantes de y et de z, les deux

premières des équations du mouvement (7) disparaissent et il ne reste plus à considérer que la troisième, laquelle, attendu qu'on a

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dG}{dz} = \frac{dH}{dy} = 0,$$

devient

$$\mu K \frac{d^2 H}{dt^2} + 4 \pi \mu C \frac{dH}{dt} = \frac{d^2 H}{dx^2} \ldots \ldots (16)$$

Dans mon Mémoire „*Sur l'absorption de la lumière d'après la théorie de* Maxwell [1]), cette équation a été étudiée pour un faisceau de lumière polarisée rectilignement, la direction du mouvement électrique (direction de la force électromotrice) étant parallèle à l'axe des z et la force magnétique excitée agissant donc parallèlement à l'axe des y, de sorte que toutes les deux sont situées dans le plan de l'onde.

Pour satisfaire à (16), prenons, maintenant aussi, pour H la fonction périodique

$$H = Ae^{px} \cos k (x - Vt),$$

où l'on a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ étant la longueur d'onde, tandis que p représente une constante à déterminer ultérieurement. V est alors la vitesse de propagation de la perturbation dans le milieu imparfaitement conducteur et imparfaitement polarisant.

La substitution de cette valeur dans (16) conduit immédiatement aux valeurs:

$$p = 2 \pi \mu C V \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

et

$$V^2 = \frac{1}{\mu K + \mu^2 C^2 \lambda^2} \ldots \ldots \ldots (18)$$

[1]) *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Ak. van Wetens.*, 2e série, tome X, p. 371. *Archives Néerlandaises*, XII, p. 177. Beiblätter zu den *Annalen Phys. u. Chem.*, 1877, p. 409. *Phil. Magaz.*, 5e Série, 4 Oct. 1877, p. 313.

7. Etudions maintenant de plus près cette vitesse de propagation, pour le cas où le susdit faisceau de lumière polarisée rectilignement, venant de l'air ou de quelque autre milieu complètement isolant, pénètre dans un corps dont la conductibilité est C et le pouvoir inducteur spécifique K.

La vitesse de propagation, qui avant la pénétration était $= \frac{1}{\sqrt{m K'}}$, K' désignant le pouvoir inducteur spécifique du milieu isolant (à distinguer soigneusement de celui du corps), devient à l'intérieur du corps, d'après (18),

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu K + \mu^2 C^2 \lambda^2}}.$$

En appelant V_i la vitesse avec laquelle l'onde se propagerait dans le corps si l'on avait $C = 0$ et que K conservât sa même valeur, vitesse uniquement imputable, par conséquent, au pouvoir inducteur électrique, on a, en vertu de (18),

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

En appelant, d'un autre côté, V_c la vitesse avec laquelle le corps propagerait une perturbation, si, conservant la même conductibilité C, il perdait son pouvoir de polarisation, K devenant donc nul, nous avons pour la vitesse de propagation par conductibilité

$$V_c = \frac{1}{\mu C \lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Vu notre ignorance complète de la constitution intérieure du milieu imparfaitement polarisant, imparfaitement conducteur, et pour d'autres raisons encore, il est impossible de donner à cette vitesse, représentée en (20), une signification physique satisfaisante.

Aussi, sans nous arrêter à ce point, nous la concevons simplement comme une *quantité mathématique* et, par la combi-

naison des équations (18), (19) et (20), nous arrivons à la remarquable relation

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_i^2} + \frac{1}{V_c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Cette relation montre que la vitesse V est plus petite que V_i et plus petite que V_c, d'où il suit qu'un isolement imparfait retarde la propagation des vibrations, de même que l'aptitude à la polarisation électrique diminue la vitesse de propagation par conductibilité.

La vitesse résultante et par conséquent modifiée V s'obtient, au moyen des vitesses particulières V_i et V_c, de la manière indiquée par l'équation (21); peut-être n'est-il pas sans intérêt de remarquer que V^2 se déduit de V_i^2 et V_c^2 de la même façon que la résistance résultante de deux conducteurs unis entre eux se déduit des résistances particulières de ces conducteurs.

De la formule (20), pour V_c, il ressort qu'un grand pouvoir conducteur retarde la propagation d'une perturbation périodique;— la vitesse de propagation est en raison inverse de ce pouvoir conducteur, de manière qu'un milieu de conductibilité très grande empêche complètement le développement d'une force magnétique.

Cela s'accorde avec le fait que l'induction magnétique ne se transmet pas à travers une surface conductrice, de sorte qu'une enveloppe conduisant bien l'électricité arrête la propagation de l'induction magnétique.

Il résulte encore de (20), — ce à quoi on ne se serait pas attendu pour des courants de conduction, — que V_c dépend de la longueur d'onde correspondant à la perturbation périodique primitive.

La vitesse résultante V, avec laquelle se propagent ces mouvements périodiques (courants de déplacement) qui constituent l'élément essentiel du mouvement lumineux, est donc, en vertu de (18), dans un milieu parfaitement isolant, indépendante de la longueur d'onde; en outre, dans un milieu qui possède plus ou moins de conductibilité électrique, cette vitesse est *moindre*.

Cette conclusion n'est toutefois exacte que si, comme il paraît

probable, le pouvoir inducteur spécifique K non-seulement est indépendant du pouvoir inducteur magnétique μ, mais n'éprouve aussi que peu ou point de modification par suite d'un changement de la conductibilité C du milieu. Alors seulement, les résultats obtenus dans ce paragraphe, en ce qui concerne la modification que la vitesse de propagation des vibrations subit quand l'isolement est imparfait, subsistent réellement. Il est toutefois extrêmement probable qu'avec l'aptitude à conduire les courants électriques la propagation des vibrations est *ralentie;* et si cette présomption semble encore trop risquée, ignorants que nous sommes de la dépendance mutuelle de K, C et μ, une *modification* de cette vitesse de propagation paraît incontestablement résulter du changement du pouvoir conducteur et du pouvoir polarisant, à moins d'admettre des hypothèses très spéciales au sujet des changements des susdites grandeurs.

Il suivrait encore de la formule (18) (et cette conséquence est bien à distinguer du résultat déduit de la form. 21) que la vitesse de propagation du mouvement périodique dépend de la longueur d'onde, qu'elle devient plus grande à mesure que la longueur d'onde diminue.

Jusqu'à quel point un semblable résultat se concilie avec la doctrine de la dispersion, c'est là une question qui, dans l'état actuel de la théorie électromagnétique, ne paraît pas encore pouvoir être tranchée. Il faudrait, pour cela, établir d'abord avec certitude par quelles circonstances les valeurs de K, C et peut-être aussi μ sont modifiées et dans quelle mesure il existe une connexion mutuelle entre ces quantités. — De cette étude dépend le développement ultérieur de la théorie électromagnétique de la lumière, et c'est déjà un pas important que d'avoir pu reconnaître la très grande probabilité d'une relation entre les quantités dont il s'agit.

8. La difficulté en question ne se fait pas sentir aussi vivement lorsqu'on recherche comment, dans un milieu imparfaitement polarisant, l'énergie de la perturbation originelle se partage en énergie potentielle et énergie actuelle.

Pour E, l'énergie électrostatique ou potentielle, et pour T, l'énergie électromagnétique ou actuelle du champ, par unité de volume, nous avons les expressions:

$$E = \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)$$

$$T = \frac{1}{8\mu}(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

où f, g, h représentent les composantes du déplacement électrique, a, b, c celles de l'induction magnétique, ces quantités ayant les valeurs:

$$f = \frac{K}{4\pi}P, \quad g = \frac{K}{4\pi}Q, \quad h = \frac{K}{4\pi}R$$

$$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma.$$

Il vient donc, en ayant égard aux formules (2) et (5),

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right\} \\ T &= \frac{1}{8\pi\mu}\left\{\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (22)$$

Dans l'hypothèse que nous avons faite au N° 6 et où les composantes F et G sont nulles, tandis que

$$H = Ae^{-px}\cos k(x - Vt), \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

on a, au lieu des valeurs (22), les valeurs plus simples:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{K}{8\pi}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 \\ T &= \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Si l'exposant p, égal à $2\pi\mu CV$ d'après la form. (17), est *nul*, c'est-à-dire si C est $= 0$ ou le milieu *parfaitement isolant*, il suit de (23):

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) = -V\left(\frac{dH}{dx}\right),$$

ou, à cause de (19),

$$K\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2,$$

de sorte que, de (24), il résulte:

$$E = T \text{ . . . . } (25)$$

Dans un milieu isolant, les deux énergies existent donc à chaque instant en quantités égales, comme cela est toujours le cas dans les systèmes vibrants, lorsqu'il n'y a pas d'autres influences en jeu.

Mais si le milieu n'est pas complètement isolant, de sorte que C et par conséquent aussi p ne disparaissent pas, il suit de (23) que les énergies E et T ne restent plus égales.

On trouve alors, comme je l'ai fait voir dans le Mémoire ci-dessus cité,

$$T = E + \Delta, \text{ . . . . } (26)$$

où Δ est une quantité positive, de sorte que T est toujours plus grand que E.

L'énergie totale,

$$W = T + E = 2E + \Delta,$$

est alors composée de la partie $2E$, consistant en *énergie lumineuse*, dans laquelle l'énergie actuelle et l'énergie potentielle entrent en quantités égales, et d'une partie Δ, imputable à des *courants de conduction*, partie qui, en général, finit par se transformer en chaleur. — Ainsi s'explique pourquoi les corps conducteurs, qui absorbent en partie le mouvement lumineux, sont opaques, tandis que les corps isolants laissent généralement traverser la lumière.

9. Cherchons maintenant pour le cas considéré au N° 6, celui où un rayon lumineux polarisé rectilignement se propage suivant l'axe des x, une relation entre

R, la force électromotrice,
w, l'intensité du courant,
β, la force magnétique.

A cet effet, prenons l'intégrale particulière (23) de l'équation (16), à savoir

$$H = A\, e^{-px} \cos k\,(x - V t),$$

et posons, pour abréger,

$$H' = A\, e^{-px} \sin k\,(x - V t);$$

il vient immédiatement:

$$\left(\frac{dH}{dx}\right) = -p\,H - k\,H'$$
$$\left(\frac{d^2 H}{dx^2}\right) = p^2\,H + 2\,p\,k\,H' - k^2\,H \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$
$$\left(\frac{dH}{dt}\right) = k\,V\,H'$$

Les relations (2), (3) et (5) donnent alors

$$\mu\,\beta = -\left(\frac{dH}{dx}\right) = p\,H + k\,H'$$
$$-4\,\pi\,\mu\,w = \left(\frac{d^2 H}{dx^2}\right) = (p^2 - k^2)\,H + 2\,p\,k\,H' \; . \; . \; . \quad (28)$$
$$R = -\left(\frac{dH}{dt}\right) = -\,k\,V\,H',$$

et, en éliminant H et H' de ces équations, nous avons la relation voulue.

L'élimination de H' conduit à

$$4\,\pi\,\mu\,w\,V - 2\,p\,R = (k^2 - p^2)\,V\,H$$
$$\mu\,\beta\,V + R \qquad = p\,V\,H,$$

d'où il résulte ensuite

$$p\,(4\,\pi\,\mu\,w\,V - 2\,p\,R) = (k^2 - p^2)\,(\mu\,\beta\,V + R);$$

en mettant pour p sa valeur $2\,\pi\,\mu\,C\,V$, et observant que

$$k^2 - p^2 = k^2 - 4\,\pi^2\,C^2\,V^2 = k^2 - \frac{4\,\pi^2\,\mu^2\,C^2}{\mu\,K + \mu^2\,C^2\,\lambda^2} = \mu\,K\;k^2\,V^2,$$

notre résultat devient

$$2\lambda^2 \mu C(w - CR) = K(\mu \beta V + R) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

équation qui fournit la relation cherchée.

Pour les deux cas *extrêmes*, 1° celui de conducteurs parfaits, sans polarisation, $K = 0$, 2° celui d'isolateurs parfaits, $C = 0$, l'équation (29) donne les deux relations

$$w - CR = 0$$

$$\mu \beta V + R = 0$$

ou, en remarquant que dans la seconde on a $V^2 = \frac{1}{\mu K}$,

$$w = CR$$

$$\text{et } \mu \beta^2 = K R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

La première de ces équations (30), applicable au cas de conductibilité parfaite, n'est autre que la *loi de* Ohm.

La seconde équation (30), pour le cas de polarisation parfaite, exprime une loi assurément tout aussi importante, bien qu'elle soit moins connue, parce que la relation entre la force magnétique et la force électromotrice a été moins étudiée.

Elle se laisse écrire sous la forme

$$\frac{R}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

et dit alors que le rapport entre la force électromotrice et la force magnétique (qui agissent dans des directions perpendiculaires entre elles) est égal à la racine carrée du rapport entre les pouvoirs inducteurs magnétique et électrique.

Peut-être est-elle présentée plus régulièrement sous la forme

$$R\sqrt{K} = \beta\sqrt{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Mais la signification de cette équation devient immédiatement claire, si nous remarquons que, en vertu de (28), on a

$$\mu \beta = -\left(\frac{dH}{dx}\right), \qquad R = -\left(\frac{dH}{dt}\right);$$

la seconde équation (30) devient alors:

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 = K\left(\frac{dH}{dt}\right)^2,$$

ou, en vertu de (24),

$$T = E,$$

c'est-à-dire, qu'il y a *partage égal des deux énergies.*

Ces deux relations, partage égal de l'énergie et loi de Ohm, en d'autres termes, vibrations non troublées et courants de conductibilité, représentent donc respectivement un milieu à polarisation *parfaite*, sans conductibilité, et un corps à conductibilité *parfaite.*

Les mouvements électriques, qui d'après la nouvelle théorie forment l'essence des phénomènes lumineux, sont donc limités: d'un côté, par un mouvement avec partage égal de l'énergie, de l'autre, par un mouvement suivant la loi de Ohm. Entre ces deux limites se trouve le cas général, très étendu, d'un mouvement plus complexe, celui de la lumière partiellement absorbée.

A ce cas général reste applicable l'équation (29), qui, notamment en ce qui concerne le facteur λ^2, conduit à différentes conséquences, dont nous ne pouvons pas nous occuper ici.

UTRECHT, mars 1883.

SUR L'ORIGINE

DU FEUILLET BLASTODERMIQUE MOYEN CHEZ LES POISSONS CARTILAGINEUX,

PAR

C. K. HOFFMANN.

(avec deux planches).

Les très importants résultats obtenus par MM. Richard et Oscàr Hertwig (4), surtout par ce dernier (5), sur l'origine du feuillet moyen du blastoderme, m'ont engagé à soumettre encore une fois les poissons cartilagineux, en ce qui concerne la formation de ce feuillet moyen, à une étude attentive. Les matériaux dont j'ai pu disposer étaient, à mon grand regret, très peu abondants, assez toutefois pour mettre bien en lumière, aussi pour l'œuf méroblastique, la haute signification de la théorie cœlomienne.

Je commence l'exposé de mes recherches par la description d'un état de développement de *Pristiurus melanoticus* un peu plus avancé que le stade *B* de Balfour (1). Dans cet état, il n'y a pas encore trace de corde dorsale et le mésoderme s'ébauche seulement; un sillon médullaire existe déjà distinctement, tandis que l'intestin est en voie de formation; les parois latérales et supérieure de l'intestin sont constituées dans ce stade par l'entoderme, la base par le vitellus nutritif. On sait, par les recherches de Balfour, que chez les poissons cartilagineux le mésoderme se développe dans la direction d'arrière en avant: il apparaît en

dernier lieu dans la région céphalique. Je vais donc donner la description d'une série de coupes transversales en allant d'avant en arrière. La partie antérieure du blastoderme ne consiste qu'en un seul feuillet, l'ectoderme, dont les cellules situées dans la ligne médiane ont une forme haute, cylindrique, tandis que celles des bords sont au contraire plus aplaties et plus basses. Plus en arrière se montre un second feuillet blastodermique, l'entoderme. La première coupe qui nous intéresse est représentée dans la fig. 1, Pl. III; elle passe exactement par la marge antérieure du sillon médullaire, lequel est déjà assez profond et limité par des bords élevés. Dans les parois de ce sillon, tant aux points où elles se rapprochent qu'à ceux ou elles s'éloignent l'une de l'autre, l'ectoderme est composé de cellules longues, étroites, coniques et groupées de façon que leurs bases et leurs sommets alternent entre eux, ce qui rend souvent difficile de décider si les cellules de l'ectoderme sont ici encore disposées en une couche unique, ou bien si ce feuillet blastodermique est déjà formé de plusieurs couches. C'est d'ailleurs là un point secondaire, vu qu'en tout cas l'ectoderme, en tant qu'il constitue les parois du sillon médullaire, acquiert très vite plus d'une couche d'épaisseur. Là où les bords relevés du sillon se continuent avec le blastoderme, l'ectoderme s'amincit rapidement et ses cellules prennent une forme beaucoup plus courte et plus plate. L'entoderme présente les caractères suivants: au-dessous du sillon médullaire il forme un feuillet composé de cellules hautes, cylindriques, rangées en une seule couche; il suit exactement le contour de l'ectoderme, se replie, aux deux côtés, dans l'espace qui existe entre les parois convergentes et divergentes du sillon médullaire, et constitue ainsi, de part et d'autre de ce sillon, un appendice en cœcum, dont les parois ne consistent également qu'en une couche unique de cellules cylindriques. Aux points où le bord relevé du sillon médullaire se recourbe pour se continuer avec le blastoderme, l'entoderme devient, aux deux côtés, sur une petite étendue, épais de plus d'une couche de cellules, quelques cellules plus arrondies se

trouvant encore sous les cellules cylindriques; bientôt, toutefois, il est de nouveau réduit à une seule couche et montre alors le même caractère que l'ectoderme, à savoir, que ses cellules deviennent plus petites et plus basses; comment les deux feuillets blastodermiques se comportent aux bords latéraux du blastoderme, c'est ce que je ne saurais dire. Tant les cellules de l'ectoderme que celles de l'entoderme sont, dans ce stade de développement, encore remplies de très nombreux globules vitellins. L'espace entouré en haut et sur les côtés par l'ectoderme, en bas par le vitellus nutritif, est, comme on sait, la cavité du futur intestin; cette cavité se prolonge, sous forme de fente, dans les deux appendices latéraux, qui représentent le premier rudiment des deux sacs cœlomiens, en d'autres termes, le premier rudiment du mésoderme conjugué, de l'entérocèle.

La fig. 2 montre une coupe prise un peu plus en arrière que la précédente. On y voit encore plus clairement comment le mésoderme forme une expansion bilatérale de l'intestin primitif, comment la cavité de l'intestin se prolonge des deux côtés dans cet appendice cœcal, et comment, dans ce stade du développement, le mésoderme ébauché présente encore un caractère purement épithélial. Plus qu'aucun autre, l'œuf méroblastique des poissons cartilagineux est propre à fournir une confirmation éclatante de l'ingénieuse théorie cœlomienne de Hertwig. L'entoderme, on le voit, n'est encore épais que d'une seule couche de cellules, sauf, ainsi que je l'ai déjà mentionné dans la description de la coupe précédente, sur une faible étendue aux deux côtés de l'axe. La destination de ces épaississements est évidente: ce sont ces cellules, en effet, qui bientôt devront contribuer à l'occlusion de l'intestin du côté ventral. Dans ces épaississements je trouve une nouvelle preuve de l'opinion que j'ai déjà soutenue ailleurs (6), à savoir que, aussi chez les poissons cartilagineux, les noyaux libres du vitellus nutritif ne prennent aucune part directe à l'occlusion de l'intestin, mais que cette occlusion est opérée exclusivement par l'entoderme proliférant lui-même. La circonstance que les noyaux libres se

trouvent en nombre considérable précisément sous les épaississements en question, indique, à mon avis, qu'ils ne contribuent qu'indirectement à la formation de l'embryon.

Non moins intéressante que les deux coupes déjà décrites est une troisième, prise encore plus en arrière et représentée dans la fig. 3. Le sillon médullaire a encore une profondeur considérable et offre tout à fait les mêmes caractères que dans les coupes précédentes, de sorte que nous n'avons pas à nous y arrêter davantage. Très remarquable, par contre, est la disposition de l'entoderme. Au-dessous du sillon médullaire, l'entoderme consiste en une seule couche de cellules cylindriques; une fente très étroite, mais néanmoins bien distincte, sépare cette partie, aux deux côtés, de la partie voisine, qu'on peut, à l'imitation de M. Hertwig, appeler entoderme intestinal (entoblaste intestinal de Hertwig); la partie située sous le sillon médullaire, non conjuguée, peut alors être désignée sous le nom d'entoderme notocordien (entoblaste notocordien de Hertwig). Si l'on examine l'entoderme notocordien sous un très fort grossissement, on reconnaît qu'il se continue directement, entre l'entoderme intestinal et la partie inférieure de la paroi latérale du sillon médullaire, avec quelques cellules oblongues, extrêmement petites, qui à leur tour passent directement dans la paroi d'un appendice en caecum situé entre l'ectoderme et l'entoderme intestinal; les parois de ces culs-de-sac, qui forment, il est à peine besoin de le répéter, le mésoderme, sont encore composées de cellules cylindriques, disposées en une seule couche. A chacun de ces sacs on peut maintenant déjà distinguer deux lames ou parois, la lame splanchnique et la lame somatique, entre lesquelles se trouve un grand espace, la cavité cœlomienne ou somatique. On voit qu'une des lames a déjà rompu sa continuité avec l'entoderme notocordien; le mésoderme est donc sur le point de se séparer complètement de l'entoderme, séparation qui est effectivement déjà consommée dans la coupe représentée fig. 4, Pl. IV, prise près de l'extrémité postérieure de l'embryon.

Le sillon médullaire y est beaucoup moins profond, mais ne

présente du reste aucune particularité notable. L'entoderme consiste distinctement en trois pièces, dont deux conjuguées et caractérisées par la forme conique élevée de leurs cellules, l'entoderme intestinal, et une non conjuguée, située sous le sillon médullaire, l'entoderme notocordien; les cellules de ce dernier sont moins hautes et de forme plus cylindrique; un espace étroit, mais bien distinct, en forme de sillon, sépare aux deux côtés l'entoderme notocordien de l'entoderme intestinal. Le mésoderme est entièrement détaché de l'entoderme et constitue un feuillet cellulaire bilatéral et symétrique, situé entre l'ectoderme et l'entoderme, aux deux côtés du sillon médullaire; il a ici, à son extrémité postérieure, complètement perdu son aspect épithélial particulier et consiste en cellules d'une forme plus arrondie, disposées en deux ou trois assises; la cavité comprise entre ses parois, si grande et si apparente dans les coupes antérieures, est imperceptible dans celle-ci. Quant à la raison du fait qu'à l'extrémité postérieure du blastoderme le mésoderme ne montre pas encore le caractère épithélial et qu'il n'existe pas encore de cavité du corps, elle apparaîtra plus loin. De la corde dorsale, on n'aperçoit encore aucune trace. Les rapports mutuels des feuillets blastodermiques aux bords de l'intestin primitif, en d'autres termes, aux bords du blastopore, ne se laissent pas déterminer avec une parfaite certitude sur des coupes transversales. On peut toutefois admettre, comme assez certain, que dans l'axe, où il n'existe que deux feuillets blastodermiques, les cellules de l'ectoderme passeront directement à celles de l'entoderme, tandis que près de l'axe, où l'on trouve à chaque côté trois feuillets blastodermiques, ces trois feuillets seront en connexion entre eux. Les matériaux nécessaires pour soumettre ce point à un examen précis m'ont malheureusement manqué.

J'ai déjà dit ne pas pouvoir faire connaître comment, dans la partie tout à fait antérieure de l'embryon, l'ectoderme et de l'entoderme se comportent l'un par rapport à l'autre aux bords du blastoderme, parce qu'ici (aux bords) le blastoderme

était un peu endommagé. De l'étude de coupes prises plus en arrière, en des points où le blastoderme était parfaitement intact, il résulte que les deux feuillets en question, aux bords latéraux du blastoderme, se continuent directement l'un avec l'autre, et qu'au niveau de l'inflexion l'entoderme est épais de deux ou trois cellules. Les coupes transversales passant par le milieu du blastoderme montrent qu'il n'y a ici du mésoderme qu'au voisinage immédiat de l'axe; plus près des bords latéraux du blastoderme, le feuillet moyen manque encore entièrement. Mais, en se rapprochant davantage de l'extrémité postérieure de l'embryon, du bord du blastopore, on voit le mésoderme s'avancer de plus en plus loin vers le bord latéral du blastoderme, l'atteindre finalement et là, juste à la ligne d'inflexion, entrer avec les deux feuillets blastodermiques en connexion si intime, qu'aucune trace de séparation ne se découvre même sous les grossissements les plus forts; cette connexion se continue sans doute tout le long du bord du blastopore, ce que des coupes longitudinales pourront le mieux mettre en évidence. Sur cette connexion, qui n'a pas une importance moindre pour l'origine du feuillet blastodermique moyen, je reviendrai tout à l'heure avec plus de détails.

Des faits ci-dessus mentionnés, il résulte donc que, dans l'œuf méroblastique des poissons cartilagineux, le mésoderme se forme exactement comme peut le désirer la théorie cœlomienne, qu'il prend naissance par délamination, de même que cela a lieu chez l'Amphioxus, ainsi que l'ont montré les belles recherches de M. Kowalevsky (9) et de M. Hatschek (3); mais, outre ce mode de production, le feuillet blastodermique en a encore un autre: pour une partie très importante il naît par dédoublement, comme nous l'apprendra l'examen d'un stade de développement un peu plus avancé, stade un peu antérieur au stade *C* de Balfour.

De cet embryon, la première coupe qui nous intéresse est représentée dans la fig. 5; c'est une coupe transversale, pratiquée près de l'extrémité antérieure. L'embryon est scissionné;

l'intestin s'est fermé. La corde dorsale manque encore complètement. Nulle part ne se laisse observer, même au grossissement le plus fort, la moindre séparation entre les cellules qui forment la paroi de l'intestin : une différenciation en entoderme notocordien et entoderme intestinal n'existe absolument plus dans la partie antérieure de l'embryon. Aux deux côtés de l'intestin se trouve le mésoderme, présentant la forme indiquée par la figure. Une coupe prise encore plus en avant — les coupes ont une épaisseur de 0,015 mm. — passe par la paroi antérieure de l'intestin ; elle nous montre seulement une masse cellulaire non encore différenciée, dont la partie médiane sera employée à constituer la paroi de l'intestin, tandis que les parties latérales serviront à former le mésoderme. Le mésoderme et l'entoderme cohèrent complètement entre eux, et il est donc évident que les deux lames mésodermiques, qui se développent vers l'avant, ne doivent pas naître par délamination, mais par dédoublement.

La figure 6 correspond à une coupe prise plus en arrière. La corde est en train de s'ébaucher ; son mode de production est de nouveau la délamination, mais les lames sont ici si serrées l'une sur l'autre, qu'on ne parvient à les distinguer que sous une très forte amplification. L'étranglement sulciforme qui en résulte dans la ligne médiane de la paroi dorsale de l'intestin peut être appelé sillon notocordien et, attendu qu'à l'extrémité postérieure nous verrons également apparaître un pareil sillon, nous désignerons le premier sous le nom de sillon notocordien antérieur.

Les coupes suivantes (en allant vers l'arrière) n'offrent rien qui mérite d'être noté, sauf que la corde se sépare complètement de l'intestin et arrive à se trouver tout à fait libre entre l'ectoderme — la base du sillon médullaire — et l'entoderme — la paroi dorsale de l'intestin.

La coupe la plus remarquable, toutefois, est celle que représente la fig. 7 : coupe transversale, prise par le milieu de l'embryon. L'intestin, comme on le voit, n'est pas encore entièrement

fermé, mais est limité à son côté inférieur par le vitellus nutritif. Le mésoderme bilatéral se compose distinctement de deux parties séparées; l'une (*més.*), située à côté de l'intestin, est — je n'ai sans doute plus besoin d'y insister, — la partie produite par délamination, par évagination de l'entoderme; elle possède encore un caractère purement épithélial. L'autre partie, séparée de la première par un grand intervalle, consiste en cellules ovales-arrondies, placées sur un ou deux rangs, et qui sont en connexion intime avec le bord du blastoderme, là où l'ectoderme et l'entoderme passent l'un à l'autre; cette partie ne peut naturellement pas avoir été formée par délamination, mais seulement par dédoublement. Plus en arrière, les deux pièces se rapprochent graduellement l'une de l'autre, pour finir par se rencontrer et s'unir complètement; alors il n'est plus possible de dire quelle partie est née par délamination et quelle autre par scission, quelle partie résulte de l'évagination de l'intestin primitif et quelle autre provient des bords du blastoderme. Au bord du blastoderme, les trois feuillets blastodermiques sont donc unis entre eux; en arrière, comme nous le savons, ce bord se continue avec le bord du blastopore, et ainsi il devient parfaitement clair comment aux bords du blastopore les trois feuillets blastodermiques sont soudés ensemble à côté de l'axe, et comment par conséquent il se produit ici, avec l'accroissement de l'embryon, aussi un accroissement du mésoderme.

Si l'on poursuit maintenant la corde en arrière, on reconnaît qu'à l'extrémité postérieure de l'embryon elle entre de nouveau en relation de continuité avec l'entoderme et qu'elle y naît sous la forme d'une évagination axiale, en cul-de-sac, de cet entoderme; donc par voie de délamination. Dans la fig. 8 j'ai représenté une coupe transversale prise immédiatement en avant de l'extrémité postérieure de l'embryon. L'entoderme notocordien et l'entoderme intestinal sont distinctement séparés l'un de l'autre par une fente étroite; le premier se recourbe en coupole vers le haut, autrement dit, forme un profond sillon, le sillon notocordien postérieur. Sur des coupes situées plus en avant, on

voit que les bords de ce sillon croissent l'un vers l'autre et qu'en même temps sa cavité se rétrécit de plus en plus, parce que les cellules qui forment sa paroi se divisent et remplissent peu à peu la cavité. La notocorde devient ainsi un cordon solide, et alors l'entoderme intestinal commence à croître des deux côtés sous la corde, de manière qu'il finit par l'isoler complètement de sa matrice, comme le montre la fig. 7.

L'examen d'un stade de développement encore plus avancé, tombant entre les stades *C* et *D* Balfour, ne présente guère de nouveaux faits intéressants pour la question de l'origine du mésoderme. Je mentionnerai seulement que dans ce stade, et même dans des stades suivants, l'entoderme notocordien de l'extrémité postérieure de l'embryon conserve son existence indépendante. Par là s'explique la forme caractéristique de la corde, telle que la montre la fig. 9, à savoir, qu'elle est engagée comme un coin entre les cellules de l'entoderme, dont elle rompt ainsi la continuité; antérieurement, j'avais déjà plus d'une fois remarqué cet aspect, mais sans pouvoir m'en rendre compte.

De ce qui précède, il résulte donc que le mésoderme forme une lame cellulaire bilatérale, qui croît dans deux directions, en avant et en arrière, et qui a une double origine. La croissance en avant commence par une évagination bilatérale de l'intestin primitif; le mode de production est donc ici la délamination. Ce mode de développement paraît durer seulement aussi longtemps que l'intestin ne s'est pas encore fermé. L'occlusion de l'intestin et l'isolement de l'embryon une fois accomplis, on voit qu'au point d'accroissement antérieur l'intestin et le mésoderme bilatéral se forment directement aux dépens d'une masse de cellules indifférentes; en d'autres termes, au point d'accroissement antérieur de l'embryon l'entoderme et le mésoderme sont intimement unis.

La partie du mésoderme qui naît par délamination est très petite, comparée au reste du feuillet moyen; il s'y ajoute des cellules qui naissent au bord du blastoderme, là où l'ectoderme et l'entoderme passent l'un à l'autre: c'est le second mode de développement, le mode par dédoublement.

Tandis qu'en avant le mésoderme se forme de deux manières différentes, par dédoublement et par délamination, en arrière, aux bords du blastopore, il ne s'accroît que d'une seule manière, par dédoublement de cellules.

Aux bords du blastoderme et aux bords du blastopore, — le point d'accroissement postérieur de l'embryon, — les trois feuillets blastodermiques sont unis entre eux; au point d'accroissement antérieur, cela n'est le cas que pour deux de ces feuillets, l'entoderme et le mésoderme.

La notocorde est un produit de l'entoderme; de même que le mésoderme, elle croît dans deux directions, en avant et en arrière; libre au milieu, elle est, en ses deux points d'accroissement, intimement unie à l'entoderme; à l'un et à l'autre de ces points, elle naît par délamination. Au point d'accroissement antérieur, ces lames sont appliquées si étroitement l'une sur l'autre, que la corde semble apparaître ici, en quelque sorte, sous la forme d'un cordon solide: le sillon notocordien antérieur n'arrive donc qu'à un faible développement. Au point d'accroissement postérieur, la délamination est au contraire très prononcée; aussi le sillon notocordien postérieur, qui au blastopore se recourbe pour se continuer directement avec l'ectoderme, est-il large et profond.

La partie axiale de l'entoderme, qui donne naissance à la corde, — l'entoderme notocordien, — est séparée aux deux côtés, par une fente étroite mais distincte, du reste de l'entoderme, — l'entoderme intestinal. En avant, l'entoderme notocordien se soude complètement avec l'entoderme intestinal, les deux parties entrent en continuité directe l'une avec l'autre; en arrière, au contraire, l'entoderme notocordien persiste encore longtemps comme partie indépendante. Cela indique, à mon

avis, qu'originairement le mésoderme naissait, à l'extremité postérieure aussi, par une délamination bilatérale de l'intestin primitif, délamination qui a été remplacée phylogénétiquement par le processus du dédoublement; la séparation entre l'entoderme intestinal et l'entoderme notocordien, la place où s'est produit le dédoublement bilatéral, rappelle encore distinctement cet état primitif.

En s'appuyant sur ce que nous a appris l'évolution de l'œuf méroblastique des vertébrés les plus inférieurs, les poissons cartilagineux, il sera peut-être possible d'expliquer les phénomènes auxquels donne lieu la formation de la notocorde et du mésoderme chez les oiseaux, phénomènes que j'ai décrits en détail dans un Mémoire récemment paru (8). Examinons d'abord ce qui est relatif à la corde. Tant chez les oiseaux que chez les poissons cartilagineux, la corde est un produit de l'entoderme; chez les uns comme chez les autres, elle a un double point d'accroissement, à l'extrémité antérieure et à l'extrémité postérieure de l'embryon; libre en sa partie moyenne, elle est, à ses deux points d'accroissement, intimement unie à l'entoderme, avec lequel elle finit par se confondre entièrement. Sa formation s'opère primitivement par voie de délamination; à l'extrémité antérieure, ce mode de développement fait bientôt place, tant chez les poissons cartilagineux que chez les oiseaux, à une production sous forme solide; néanmoins, le premier mode de développement se montre parfois encore très distinctement chez les oiseaux, ainsi qu'il résulte, par exemple, des détails que j'ai communiqués au sujet de l'*Haematopus ostralegus* (8). Au point d'accroissement postérieur, chez les poissons cartilagineux, le mode primitif de développement de la notocorde, par délamination, persiste au contraire pendant un temps notable; en conséquence, on rencontre ici un sillon notocordien large et profond, qui, au bord du blastopore, se recourbe et se continue directement avec l'ectoderme. Parmi les oiseaux, on trouve que

chez les palmipèdes et les échassiers, dans les stades de développement de 16—23 vertèbres primitives, il se forme également un sillon notocordien très apparent, qui au bord antérieur du canal neurentérique, de même que chez les poissons cartilagineux au bord du blastopore, passe directement, en se recourbant, dans l'ectoderme; je renvoie de nouveau, à cet égard, aux recherches ci-dessus citées (8).

En ce qui concerne la corde dorsale, les poissons cartilagineux et les oiseaux présentent donc, dans les points essentiels, un accord parfait; là où l'on trouve, chez les oiseaux, des dispositions qui semblent s'éloigner de celles qu'on observe dans la classe moins élevée des poissons cartilagineux, ces dispositions se laissent pourtant ramener entièrement à l'état primitif, tel qu'il existe dans cette classe.

Considérons maintenant le mésoderme. Aussi bien chez les oiseaux que chez les poissons cartilagineux, le feuillet blastodermique moyen forme une lame cellulaire bilatérale; dans l'axe, on ne le rencontre jamais. La complication supérieure qui résulte, chez les oiseaux, du développement de la ligne primitive rend naturellement nécessaire de n'entendre chez eux, par cet axe, que l'axe embryonnaire (8).

Chez les poissons cartilagineux et chez les oiseaux, le mésoderme croît dans deux directions, en avant et en arrière; chez les premiers, il a un double mode de production, par délamination et par dédoublement; une très petite partie seulement naît de la première manière. Chez les oiseaux, le feuillet blastodermique moyen se développe uniquement par dédoublement. De là résulte encore une différence importante dans les rapports de la corde dorsale chez les poissons cartilagineux et chez les oiseaux. La formation du mésoderme par délamination, comme évagination bilatérale de l'intestin primitif, rend parfaitement explicable l'existence d'un entoderme notocordien, séparé par un petit intervalle de l'entoderme intestinal. Mais chez les oiseaux, où le dédoublement a entièrement supplanté la délamination, un entoderme notocordien indépendant ne peut plus se développer.

Tandis que, chez les poissons cartilagineux, il est impossible de décider si le mésoderme qui se forme par dédoublement aux bords du blastoderme est un produit de l'ectoderme ou bien de l'entoderme, parce qu'à ces bords les deux feuillets blastodermiques passent l'un à l'autre, chez les oiseaux il n'est guère douteux que le mésoderme qui se développe aux bords du blastoderme ne soit un produit de l'entoderme. Chez eux, en effet, l'ectoderme ne se recourbe pas pour se continuer avec l'entoderme, mais le premier de ces feuillets s'étend beaucoup plus loin sur le vitellus que le second; aussi savons-nous que c'est au bord épaissi de l'entoderme, au bourrelet blastodermique (*Keimwall* des auteurs allemands), qu'a lieu la production incessante, par dédoublement, de nouvelles cellules mésodermiques. L'apparition de la ligne primitive, chez les oiseaux, rend alors très compliqués surtout les phénomènes du développement du mésoderme au bord postérieur.

Bien que chez les oiseaux la formation du mésoderme par dédoublement se soit substituée au mode primitif, par délamination, il n'est pourtant pas difficile, je crois, de retrouver, même chez eux, les traces d'un processus de délamination.

J'ai montré, en effet, que le développement du mésoderme des oiseaux commence sous la forme d'un épaississement axial de l'entoderme. Or il suffit de se représenter cet épaississement axial comme une délamination, dans laquelle les lames sont très serrées les unes sur les autres, pour avoir l'image de la première formation du mésoderme, telle qu'elle s'effectue chez les oiseaux. C'est plus tard seulement que le mésoderme ainsi ébauché se complète par des cellules naissant au bord du bourrelet blastodermique.

Deux circonstances surtout me paraissent avoir contribué à ce que, chez les oiseaux, le dédoublement a remplacé la délamination. En premier lieu, le fait que le sillon médullaire et l'intestin des poissons cartilagineux se forment beaucoup plus tôt que ceux des oiseaux; chez les premiers, la genèse du mésoderme par délamination, la formation de l'intestin et le déve-

loppement du sillon médullaire sont à peu près simultanés. Chez les oiseaux, où le mésoderme et l'intestin n'apparaissent que beaucoup plus tard, le mésoderme est alors déjà entièrement ébauché. En second lieu, le fait que chez les oiseaux les noyaux libres du vitellus nutritif participent directement à la formation des feuillets blastodermiques, ce qui n'est pas le cas chez les poissons cartilagineux. Chez les poissons, tant osseux que cartilagineux, je trouve que les noyaux libres du vitellus nutritif existent toujours en grand nombre là surtout où a lieu un accroissement actif; ni à la formation des feuillets blastodermiques, ni à celle de l'embryon, ils ne prennent directement part; aussi ne puis-je leur attribuer d'autre fonction que celle dont j'ai donné ailleurs (7) un exposé détaillé. Mais, chez les oiseaux, les choses se passent autrement; là s'adjoignent continuellement, aux deux feuillets blastodermiques primitifs, des éléments provenant du vitellus nutritif; les sphères de segmentation secondaires y rendent la formation du mésoderme encore beaucoup plus compliquée (8).

De la manière susdite, les phénomènes du développement du feuillet blastodermique moyen chez les oiseaux, par voie de dédoublement, se laissent, me semble-t-il, expliquer et en même temps mettre d'accord avec les exigences de la théorie cœlomienne. Le point capital est que le mésoderme et la notocorde sont des produits de l'entoderme; dans l'œuf holoblastique, ils naissent uniquement par délamination, par une évagination bilatérale de l'intestin primitif; dans l'œuf méroblastique, ils restent un produit de l'entoderme, mais l'intestin primitif n'est ici plus en état de fournir le mésoderme entier: au mode primitif de développement, par délamination, vient alors s'en ajouter un second, par dédoublement, et peu à peu, par suite de la complication supérieure des phénomènes évolutifs, le dédoublement se substitue entièrement à la délamination. Ces processus sont à leur tour dans le rapport le plus étroit avec la perfection plus ou moins grande de la gastrula, telle que Haeckel nous l'a dépeinte dans sa très remarquable théorie de la gastræa (2).

Dans les considérations qui précèdent, je me suis borné aux oiseaux, parce que mon seul but était, en ce moment, de donner une explication des phénomènes qui se produisent lors de la formation du mésoderme chez les oiseaux, et de fonder cette explication sur les faits que nous révèle l'histoire du développement du feuillet blastodermique moyen chez les poissons cartilagineux. Ce n'est pas dans le mode de développement du mésoderme, par dédoublement ou par délamination, mais dans sa naissance de l'entoderme, que réside, à mon avis, la haute valeur de la théorie cœlomienne, et j'espère que ses ingénieux fondateurs, MM. Oscar et Richard Hertwig, pourront se rallier à cette opinion; il n'est alors plus nécessaire de ramener, ainsi que l'a fait M. Oscar Hertwig dans son dernier travail (5), l'origine du mésoderme et de la notocorde à une formation ectodermique.

Il y a encore un point sur lequel je veux fixer un instant l'attention. Dans leur *Coelomtheorie*, MM. Oscar et Richard Hertwig donnent la définition suivante du feuillet blastodermique moyen (p. 120): „En excluant de la signification du terme „„feuillet blastodermique moyen" tout ce qui lui est étranger, „on obtient une définition simple et rigoureuse. Nous en excluons „donc les cellules qui, chez les larves des Echinodermes et des „Vers, entre l'ectoblaste et l'entoblaste, donnent naissance à „un mésenchyme, — les cellules situées à la bouche primitive „des Mollusques, des Turbellariés et des Plathelminthes, — les „cellules disséminées des Bryozoaires et des Rotateurs, — et „nous proposons d'appliquer aux formations de ce genre un nom „spécial, celui de „germes ou cellules primitives du mésenchyme" „(*Mesenchymkeime oder Urzellen des Mesenchyms*). Elles se „distinguent des feuillets blastodermiques en ce qu'elles n'ont „pas la disposition épithéliale et ne sont pas des couches d'épi„thélium plissées, en ce qu'elles se dégagent plutôt de la „connexion épithéliale comme cellules migratrices, pour con„stituer, entre les feuillets blastodermiques qui déterminent la „forme, ou entre les couches épithéliales limitantes, une masse

„de remplissage, qui peut accomplir les fonctions les plus diver- „ses, mais qui a sans doute, à l'origine, servi essentiellement „d'organe de soutien. Les cellules primitives du mésenchyme „se distinguent encore des feuillets blastodermiques, qui se for- „ment successivement dans un ordre régulier, en ce que leur „apparition n'est liée à aucun stade déterminé du développement „embryonnaire. Tandis, par exemple, que chez les Echinodermes „et les Mollusques elles émigrent avant même que l'entoblaste „soit invaginé, elles n'entrent en scène, chez les Vertébrés, „que dans le stade de la formation des vertèbres primitives. „Le résultat final de notre examen est donc que, sous le nom „de „feuillet blastodermique moyen", on a jusqu'ici confondu „deux formations très différentes, et qu'il est aujourd'hui néces- „saire d'introduire, à la place de la notion ancienne et mal „déterminée, deux notions nouvelles, plus précises. Par feuillet „blastodermique, nous entendons des cellules embryonnaires unies „entre elles en une lame épithéliale, qui, par plissement ou „différenciation, fournit la base des formes les plus variées. Aux „feuillets embryonnaires isolés nous donnons les noms de ecto- „blaste et entoblaste, de feuillets pariétal et viscéral du mé- „soblaste. L'ectoblaste et l'entoblaste sont les deux feuillets „blastodermiques primaires, provenant de l'invagination de la „blastula; ce sont donc toujours eux qui apparaissent les pre- „miers. Les mésoblastes pariétal et viscéral, ou les deux feuil- „lets moyens du blastoderme, ont constamment une origine „postérieure et naissent par évagination ou implication de l'en- „toblaste, dont le reste peut alors être distingué, sous le nom „d'entoblaste secondaire, de l'entoblaste primaire. Les deux „mésoblastes circonscrivent une cavité de nouvelle formation, „l'entérocèle, qui doit être regardée comme un diverticule séparé „de l'intestin primitif. De même que les animaux à deux feuil- „lets sont dérivables de la gastræa, de même les animaux à „quatre feuillets se laissent ramener à une forme cœlomienne. „Quant aux cellules embryonnaires qui se dégagent isolément „de la connexion épithéliale, nous les tenons pour quelque

„chose de différent des feuillets blastodermiques et nous les „désignons sous le nom de germes ou cellules primitives du „mésenchyme".

Les phénomènes qui se passent pendant la formation des feuillets blastodermiques dans l'œuf méroblastique des poissons cartilagineux prouvent suffisamment, je crois, que la distinction tranchée entre le mésoblaste et le mésenchyme, telle que l'admet M. Hertwig, n'existe pas. Chez les poissons cartilagineux, en effet, il n'y a qu'une petite partie du feuillet blastodermique moyen qui se forme comme évagination bilatérale de l'intestin primitif, comme mésoblaste, au sens de Hertwig; la partie de beaucoup la plus considérable se développe aux bords du blastoderme et aux bords du blastopore, et à cette partie convient donc le nom de mésenchyme, suivant M. Hertwig. La partie du feuillet blastodermique moyen née à l'état de mésoblaste s'unit bientôt si complètement à la partie née comme mésenchyme, qu'il n'est alors plus possible de décider quelle pièce a eu la première origine, quelle autre, la seconde. Les cellules de la partie issue comme mésenchyme prennent le même aspect épithélial que celles de la partie formée par évagination de l'intestin primitif; la cavité somatique, l'entérocèle, qui originairement ne se rencontre que dans la partie du feuillet blastodermique moyen née par délamination, s'étend bientôt aussi dans la partie apparue comme mésenchyme.

LEYDE, avril 1883.

LISTE DES OUVRAGES CITÉS.

(1) F. M. Balfour, A Monograph on the development of Elasmobranch fishes, 1878.

(2) E. Haeckel, Die Gastraea-Theorie etc.; in: *Jenaische Zeitschrift*, t. VIII, p. 1874.

(3) B. Hatschek, Studien über Entwickelung des *Amphioxus*, 1881.

(4) O. und R. Hertwig, Die Coelomtheorie; in *Jenaische Zeitschrift*, T. XV, 1881.

(5) O. Hertwig, Die Entwickelung des mittleren Keimblattes der Wirbelthiere; in: *Jenaische Zeitschrift*, t. XV et XVI, 1881—1882.

(6) C. K. Hoffmann, Contribution à l'histoire du développement des Plagiostomes, in: *Archives néerl.*, t. XVI, p. 92, 1881.
(7) Idem, Zur Ontogenie der Knochenfische, in: *Verhand. Koninkl. Akad. van Wetenseh.*, t. XXI et XXIII, 1881 et 1882.
(8) Idem, Ueber die Bildung des Mesoderms, die Anlage der Chorda dorsalis und die Entwickelung des Canalis neurentericus bei Vogelembryonen; in: *Verhand. Koninkl. Akad. van Wetensch.*, t. XXIII, 1883.
(9) A. Kowalevsky, Weitere Studien über die Entwickelungsgeschichte des *Amphioxus lanceolatus;* in: *Archiv f. mikrosk. Anatomie*, t. XIII, 1876.

EXPLICATION DES FIGURES.

Fig. 1, 2, 3, 4. Quatre coupes transversales d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, un peu plus âgé que le stade *B* de Balfour.

Fig. 5, 6, 7, 8. Quatre coupes transversales d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, un peu plus jeune que le stade *C* de Balfour.

Fig. 9. Coupe transversale à travers l'extrémité postérieure de la corde dorsale d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, correspondant au stade *D* de Balfour.

Légende.

ect. Ectoderme.
ent. Entoderme.
més. Mésoderme.
ent. n. Entoderme notocordien.
ent. i. Entoderme intestinal.
i. Intestin.
v. Vitellus nutritif.
cœl. Cavité somatique (cavité cœlomienne).

SUR LA FORCE ASPIRATRICE DU CŒUR,

PAR

S. DE JAGER.

Les conditions qui ont été signalées comme causes de la dilatation diastolique du cœur se laissent répartir en deux sections, l'une embrassant toutes celles qui agiraient de manière à amener la paroi ventriculaire dans l'état diastolique sans le secours du sang affluent à l'intérieur du ventricule, l'autre comprenant celles qui, inhérentes précisément au flux sanguin, tendraient à dilater le ventricule détendu. Toutes ces conditions ainsi divisées, on peut se poser cette question simple: la paroi du ventricule se comporte-t-elle, lors de la diastole, tout à fait passivement vis-à-vis du sang qui pénètre dans la cavité, ou bien, inversement, le sang affluent se montre-t-il passif à l'égard de la paroi? Dans le premier cas nous pourrons, par rapport au sang affluent, parler de diastole passive, dans le second, de diastole active. Il est vrai que nous nous écarterons ainsi de l'usage ordinaire en ce qui concerne la signification attachée aux mots „diastole active"; mais, vu l'importance qu'il y a à savoir si la diastole est dépendante ou non de l'afflux sanguin, je crois pouvoir faire cette distinction en diastole active et diastole passive, surtout aussi parce qu'elle permet de formuler nettement la question ci-dessus posée.

A la première section (conditions pour la diastole active) nous pouvons alors rapporter: *a* les forces élastiques qui se sont

(6) C. K. Hoffmann, Contribution à l'histoire du
giostomes, in: *Archives néerl.*, t. XVI, p. 99
(7) Idem, Zur Ontogenie der Knochenfische, i
van Wetenseh., t. XXI et XXIII, 1881 e
(8) Idem, Ueber die Bildung des Meso
dorsalis und die Entwickelung des C
bryonen; in: *Verhand. Koninkl. A*
(9) A. Kowalevsky, Weitere Studier
Amphioxus lanceolatus; in: *A*

ystole, de
.ique soumis
culaire active
.laire actif après
d le surcroît de
rs de la diastole,
.isseaux, distribués
.on, et par là contribuera
raccourcissement des artères
.ologie, *herausgegeben von* Dr L.

EY .ur la face externe du cœur, par suite
.horacique négative (Donders).

Fig. 1, 2, 3, 4. Q
melanoticus, un
Fig. 5, 6, 7,
melanoticus
Fig. 9.
dorsale
D de

section (conditions pour la diastole passive) anger seulement le reste d'énergie que le sang à son entrée dans le cœur, énergie qui serait mettre dans l'état diastolique la paroi musculaire[1].

La pression intra-thoracique négative, si bien expliquée par Donders, a indubitablement de l'influence sur la production de la diastole; néanmoins, on peut la négliger lorsqu'il s'agit de décider entre ce que nous avons nommé diastole active et diastole passive, parce que, dans le cas où le thorax a été largement ouvert et où il ne saurait donc plus être question de l'influence de la pression négative, la diastole ne s'en produit pas moins.

Les causes de la diastole ont été, de différents côtés, l'objet de vives controverses, à la suite desquelles on penchait généralement, de plus en plus, vers l'opinion que la diastole s'établit passivement: elle serait due au sang qui entre dans le cœur, aidé peut-être par une ou plusieurs des forces auxiliaires que

[1]) Bien que, d'une manière générale, cette division en diastole active et diastole passive soit moins exacte, j'ai dû, pour les raisons susdites, la faire à l'égard du sang versé par la veine dans le cœur. Partout où il est question, dans ce Mémoire, de diastole active ou passive, ces termes sont donc pris dans l'acception ci-dessus indiquée.

ées dans la seconde section et regardées, par uent, comme des moments actifs de la diastole. faveur de la diastole active fut toutefois rches de MM. Goltz et Gaule [1]). Ces idée d'unir un manomètre à minire introduit par l'artère carotide par la veine jugulaire dans le ion de leur appareil permettait de ylindre tournant, par le style fixé au metre, tantôt la pression moyenne, tantôt la mum. Il était possible aussi, en faisant fonctionner s la soupape à minimum, d'employer l'appareil comme nomètre à maximum. Ils mesurèrent ainsi les pressions minimum et maximum dans les ventricules droit et gauche. Une fois, par exemple, ils trouvèrent dans le ventricule droit une pression minimum de — 52 mm. *Hg*, dans le ventricule droit de — 17,2 mm. *Hg*. De la même manière, le tube ayant été introduit dans l'oreillette droite, ils obtinrent des pressions minimum de — 10,4, — 10, — 8,8. Dans ces expériences, le thorax était fermé et la respiration normale; mais d'autres expériences, où le thorax était ouvert et la respiration entretenue artificiellement, où par conséquent l'aspiration thoracique était entièrement supprimée, montrèrent également, dans le ventricule gauche, l'existence d'une pression négative considérable.

Ces recherches avaient donc mis hors de doute qu'il y a dans le ventricule, en dehors de toute influence de la respiration, une certaine pression négative, une aspiration par conséquent, qui, d'après MM. Goltz et Gaule, se produirait durant la diastole du ventricule. Assurément, le résultat de leur travail aurait fortement plaidé en faveur d'une diastole active, si, postérieurement, une autre explication n'avait été donnée de cette pression négative.

---

[1]) Fr. Goltz *und* J. Gaule, *Ueber die Druckverhältnisse im Innern des Herzens* (Pflüger's *Archiv f. d. ges. Phys.*, t. XVII, p. 100).

M. Moens [1]), partant de sa théorie du tracé du pouls, était naturellement conduit à la conclusion qu'à la fin de la systole, lorsque tout le sang est expulsé du ventricule, il doit se produire une aspiration dans ce ventricule. D'après M. Moens, en effet, „le contenu du ventricule est pompé avec une rapidité croissante dans l'aorte, jusqu'à ce que *brusquement* l'afflux cesse, dès que le ventricule est vidé; de même que dans le ballon de caoutchouc, il doit alors se produire une pression négative" [2]). Le sang, chassé par la contraction de la paroi ventriculaire, continuera à se mouvoir en vertu de la vitesse acquise et occasionnera, à l'endroit d'où il est venu (le ventricule vidé), une aspiration. Si l'on prend un vase à pression rempli de liquide et relié à un tube élastique débouchant librement, et que, le liquide coulant régulièrement, on ferme tout à coup un robinet placé à l'embouchure du tube, on verra le tube s'affaisser successivement, à partir de ce point, sur toute sa longueur. La pression que la paroi du tube exerçait, avant la fermeture du robinet, sur le contenu, est alors remplacée par une force d'aspiration, dont la valeur diffère pour les différents points du tube. La résultante de ces forces d'aspiration détermine peu à peu l'arrêt du liquide, qui continuait à s'écouler, puis le ramène dans le tube. Celui-ci se remplit de nouveau, et par suite la force d'aspiration de la paroi diminue successivement, jusqu'à ce que la paroi recommence à exercer une pression positive. Bientôt cette pression est suffisante pour expulser de nouveau le contenu du tube. A ce point de rebroussement dans le mouvement du liquide apparaît le premier sommet de fermeture. De la même manière, dans le système des vaisseaux artériels, dès que le sang cesse d'affluer dans l'aorte, — ce qui correspond à la fermeture du robinet du tube élastique, — il doit se former, suivant M. Moens, des ondes d'occlusion, et par conséquent

---

[1]) A. Isebree Moens, *Der erste Wellengipfel in dem absteigenden Schenkel der Pulscurve* (Pfluger's *Archiv f. d. ges. Phys.*, t. XX, p. 517).
[2]) *l. c.*, p. 517.

il doit aussi se produire à un certain moment, à partir des valvules de l'aorte, une aspiration, qui parcourra les tubes élastiques, — ici les artères. Attendu, toutefois, que nous n'avons pas ici, au point où se trouvent les valvules aortiques, un mécanisme analogue au robinet qui isole brusquement le vase à pression d'avec le tube, mais que la communication reste libre entre le lieu d'où le sang est venu (ventricule) et le tube élastique (aorte), il doit, pour la même raison que ci-dessus, se produire aussi une aspiration en ce lieu même (ventricule). Par suite, un peu de sang y refluera de l'aorte et occasionnera, suivant M. Moens, l'occlusion des valvules artérielles. M. Moens explique donc d'une autre manière que MM. Goltz et Gaule la pression négative que ceux-ci ont trouvée dans le ventricule; il croit que cette pression se produit à la fin de la systole, alors que le sang a bien été expulsé du ventricule, mais que la paroi est encore en contraction systolique.

Toute la question pivote donc, en ce moment, sur le point de savoir si la pression négative constatée par MM. Goltz et Gaule apparaît, oui ou non, durant la diastole. S'il peut être prouvé que cette pression négative, indépendante de la force d'aspiration du thorax, se produit durant la diastole, on sera en droit d'en conclure, d'une manière certaine, que le cœur n'agit pas seulement comme pompe foulante, mais aussi comme pompe aspirante, que par conséquent la diastole active, telle que nous l'avons définie ci-dessus, existe réellement.

Si la pression négative se produit pendant la diastole, elle doit se propager vers les oreillettes, c'est-à-dire qu'elle doit exercer une aspiration sur le sang qui y est contenu, car, dans ce stade de l'action cardiaque, les valvules auriculo-ventriculaires sont ouvertes; dans le cas, au contraire, où la pression négative apparaîtrait aux derniers instants de la systole, comme le pense M. Moens, cette aspiration devrait se propager le long des artères. Or, est-il possible de constater l'existence d'une pareille aspiration intra-artérielle?

Pour trancher cette question, j'ai déterminé les pressions

maximum et minimum dans le ventricule gauche et dans l'aorte. L'apparail employé est représenté schématiquement sur la Pl. V.

En *a* on adapte un tube pouvant être introduit dans la carotide ou dans la jugulaire. Le tube *a* se divise, au point *b*, en deux branches, dont chacune est pourvue d'un robinet *p*, *p'*. A la suite du robinet *p'* se trouve une soupape *K'*, qui ne peut s'ouvrir que dans le sens de la flèche figurée au-dessous. Elle établit, par le tube *d'*, la communication avec le manomètre *M'*. La soupape *K'* ne pouvant s'ouvrir que dans le sens de la flèche, le niveau du manomètre *M'* ne changera que lorsque la pression en avant de *K'*, c'est-à-dire dans le tube *a*, deviendra plus forte que celle en arrière de *K'*. Cette soupape fonctionnera donc comme soupape à maximum, et le traceur *V'*, fixé au petit flotteur de la branche ouverte du manomètre *M'*, n'inscrira sur le cylindre tournant que la pression maximum produite en *a*. Inverse est l'action de la soupape *K*, reliée par le tube *d* au manomètre *M*. Cette soupape *K*, s'ouvrant seulement dans la direction de la flèche placée au-dessous, agira comme soupape à minimum, et le traceur *V* enregistrera donc la pression minimum qui se manifeste en *a*. Latéralement aux tubes *d* et *d'* sont adaptées, en *e* et *e'*, des pièces en T. La branche de chacune de ces pièces en T se rend à un manomètre *m* et *m'*, mais de chacune se détache auparavant, également par une pièce en T, un tube qui, au moyen d'un long tuyau de caoutchouc, communique avec un flacon *F* et *F'*. Ces parties (manomètre et flacon) peuvent, chacune séparément, être isolées des tubes *d* et *d'*, à l'aide des robinets *q* et *q'*. Tandis que les manomètres *M* et *M'* sont affectés à l'inscription des pressions maximum et minimum, les deux parties latérales servent à déterminer les points zéro des manomètres *M* et *M'* et à remettre ceux-ci à ces points après chaque expérience.

Veut-on, en effet, employer l'appareil à la détermination des pressions maximum et minimum dans une partie du système vasculaire, il faut introduire dans cette partie le tube, rempli de bicarbonate de soude, qui s'adapte au tube *a* Tout le reste

du système de tubes est rempli d'eau, les manomètres sont à mercure. Avant l'introduction, toutefois, les manomètres M et M' doivent naturellement se trouver à leurs points zéro, pour qu'on puisse voir ultérieurement de combien ils s'en sont écartés. Ces points zéro dépendront évidemment de la hauteur à laquelle s'élève l'orifice du tube fixé en a. On commence donc par placer cet orifice à la même hauteur, au-dessus de la table d'expérimentation, où il se trouvera plus tard dans le système vasculaire; on ferme alors le robinet l, on ouvre q et q', et on place le flacon F assez bas pour que les manomètres M' et m' indiquent tous les deux une pression qui soit indubitablement au-dessous de zéro. Cela fait, on oblitère le tube de caoutchouc c', au moyen d'une vis de serrage. Ensuite le flacon F est placé haut, de manière que le mercure prenne un niveau élevé dans les manomètres M et m, puis le tube c est oblitéré à son tour. Si maintenant on ouvre d'abord l, puis p', les manomètres M' et m' monteront jusqu'à leur point zéro; referme-t-on ensuite p', puis ouvre-t-on p, les manomètres M et m s'abaisseront jusqu'à leur zéro. Comme les manomètres m' et m sont pourvus d'échelles, on pourra donc connaître par une simple lecture jusqu'à quel point ils ont respectivement monté ou baissé. Le tube fixé en a étant alors introduit dans le système vasculaire, il suffit d'ouvrir l, p' et p, tandis que q et q' restent fermés, pour que les traceurs V' et V inscrivent les pressions maximum et minimum. Les vis de serrage sur les tubes c' et c ne sont plus nécessaires maintenant, et si après chaque détermination on veut ramener les manomètres M' et M à leurs zéros, on n'a qu'à fermer p' et p, à ouvrir q' et q, et à placer les flacons F et F à des hauteurs telles que les manomètres m' et m atteignent de nouveau les points zéro déterminés antérieurement. Les manomètres M' et M suivent alors d'eux-mêmes.

J'ai pu de cette manière, en faisant pénétrer le tube fixé en a, qui avait été préalablement bien huilé, dans la carotide droite, déterminer la pression la plus haute et la pression la plus basse, soit dans l'aorte, soit dans le ventricule lorsque le

tube était poussé entre les valvules aortiques. Les expériences eurent lieu sur des chiens, narcotisés par des injections de morphine et ayant subi la trachéotomie. Comme j'opérais sur des animaux de taille différente, j'étais obligé de me régler, en ce qui concerne le diamètre du tube, sur celui de la carotide où il devait être introduit.

Dans mes premières expériences sur les pressions dans l'aorte immédiatement derrière les valvules aortiques, — le tube était poussé jusqu'au contact de ces valvules, puis retiré de 1 cm. environ, — je trouvai que le manomètre à minimum ne s'abaissait pas. En conséquence, dans les déterminations suivantes, avant d'ouvrir l, p' et p, je portai, en donnant une position élevée au flacon F et en ouvrant q, le manomètre-minimum à une hauteur considérable, supérieure à la pression moyenne qui pouvait être supposée dans l'aorte. Après avoir de nouveau introduit le tube jusque contre les valvules et l'avoir ensuite retiré de 1 cm., j'ouvris le robinet à maximum p', bien entendu après avoir refermé q, laissai le manomètre-maximum atteindre son point le plus élevé, refermai alors le robinet p' et ouvris le robinet à minimum p. Le manomètre à minimum baissa, mais n'en resta pas moins à une grande hauteur au-dessus du zéro. Ensuite, le robinet à maximum p' fut aussi de nouveau ouvert, de sorte que les pressions maximum et minimum s'inscrivaient alors simultanément. Il est nécessaire de fermer le robinet à maximum p' avant d'ouvrir le robinet à minimum p', parce qu'autrement la haute pression sous laquelle, à raison du niveau élevé du manomètre M, le liquide se trouve dans les tubes d, e, p se transmet, lors de l'ouverture de p', à travers b, p' et la soupape-maximum K', et fait monter le manomètre à maximum.

Je citerai une couple des résultats obtenus:

Chien. Poids 16 kilogr.

Aorte.

Pression maximum.	Pression minimum.
+ 168 mm. *Hg*.	+ 134 mm. *Hg*.
+ 156 „ „	+ 140 „ „
+ 146 „ „	+ 128 „ „

Chien. Poids 3½ kilogr.

Aorte.

Pression maximum.	Pression minimum.
+ 132 mm. *Hg.*	+ 112 mm. *Hg.*
+ 136 „ „	+ 120 „ „
+ 132 „ „	+ 122 „ „

On voit que le manomètre à minimum conservait toujours une hauteur considérable.

En poussant le tube encore plus loin, on le fait pénétrer dans le ventricule. Ordinairement, une des valvules aortiques est transpercée dans cette opération, comme l'indiquent aussi MM. Goltz et Gaule. La lésion d'une des valvules se laisse exactement contrôler au stéthoscope: on perçoit alors distinctement un bruit de souffle diastolique. De la même manière que pour l'aorte, en ouvrant d'abord le robinet à maximum, puis le robinet à minimum, on peut maintenant déterminer les pressions dans le ventricule. En voici quelques exemples:

Chien. Poids 3¾ kilogr.

Aorte.		Ventricule gauche.	
Press. max.	Press. min.	Press. max.	Press. min.
+ 124 mm. *Hg.*	+ 118 mm. *Hg.*	+ 68 mm. *Hg.*	+ 30 mm. *Hg.*
		+ 50 „ „	+ 22 „ „

Il y avait un bruit de souffle diastolique après l'introduction du tube dans le ventricule; à l'autopsie, je constatai qu'une des valvules aortiques avait été perforée à la base.

Chien. Poids 6 kilogr.

Aorte.		Ventricule gauche.	
Press. max.	Press. min.	Press. max.	Press. min.
+ 134 mm. *Hg.*	+ 118 mm. *Hg.*	+ 114 mm. *Hg.*	+ 34 mm. *Hg.*
+ 130 „ „	+ 106 „ „	+ 106 „ „	+ 52 „ „

Ces déterminations furent faites alternativement dans l'aorte et dans le ventricule. Bruit de souffle diastolique. Perforation valvulaire reconnue à l'autopsie.

Chien. Poids 14,2 kilogr.

Aorte.		Ventricule gauche.	
Press. max.	Press. min.	Press. max.	Press. min.
+ 134 mm. *Hg*.	+ 110 mm. *Hg*.	+ 36 mm. *Hg*.	+ 4 mm. *Hg*.
+ 128 „ „	+ 110 „ „	+ 34 „ „	+ 10 „ „
+ 106 „ „	+ 80 „ „		

Ici encore, déterminations alternatives. Bruit de souffle diastolique. L'une des valvules perforée.

Dans la première des expériences qui viennent d'être mentionnées, je n'avais déterminé qu'une seule fois les pressions dans l'aorte, puis dans le ventricule. Ainsi qu'on le voit par les chiffres, la pression maximum était plus forte dans l'aorte que dans le ventricule et le manomètre à minimum n'indiquait pas une pression négative. Le premier de ces résultats me parut d'abord pouvoir être attribué à l'insuffisance artificielle des valvules. Il est vrai que M. Cohnheim [1]) et M. Rosenbach [2]) pensent avoir montré que le muscle cardiaque possède plus d'énergie qu'il n'en emploie dans les circonstances ordinaires, qu'il dispose donc d'une espèce de réserve qui, entrant en action lors d'une insuffisance soudaine des valvules, empêcherait la pression de diminuer dans la carotide; mais, par contre, M. Goddard [3]) a émis l'opinion, fondée sur ses expériences, qu'en cas d'insuffisance subite il se produit bien dûment un abaissement de la pression sanguine dans le système aortique. Aussi, je le répète, j'avais d'abord cru devoir mettre sur le compte de l'insuffisance la pression basse observée dans le ventricule. Seulement, je ne m'expliquais pas pourquoi je n'y avais pas trouvé une pression négative, celle-ci ayant été constatée par MM. Goltz et Gaule dans le cas d'insuffisance valvulaire. La

---

[1]) J. Cohnheim, *Vorlesungen über allgemeine Pathologie*, 1877, t. I, p. 38.

[2]) O. Rosenbach, *Ueber artificielle Herzklappenfehler* (*Archiv f. exp. Pathologie und Pharmacologie*, 1878, t. IX, p. 1).

[3]) J. Goddard, *Kunstmatig opgewekte gebreken aan het ostium aortae. Academisch proefschrift*, 1879, Leiden.

chose devint encore plus singulière lorsque, dans les expériences suivantes, après avoir obtenu de nouveau le même résultat dans le ventricule, je retrouvai dans l'aorte des pressions maximum et minimum à peu près égales à celles qui j'y avais constatées avant l'insuffisance. Etait-il possible que la diminution de pression y existât seulement durant le temps où le tube était engagé, à travers la valvule, dans le ventricule? Pour tâcher d'éclaircir ce point, je déterminai de nouveau les pressions maximum et minimum dans l'aorte, puis, avec insuffisance, dans le ventricule, tandis qu'en même temps était enregistrée la pression du sang dans l'artère crurale droite. Le résultat fut:

Chien. Poids 7 kilogr.

Aorte (bruits du cœur normaux).		Artère crurale droite.
Press. max.	Press. min.	Pression du sang.
+ 148 mm. *Hg*.	+ 132 mm. *Hg*.	+ 126 mm. *Hg*.
Ventricule gauche (bruit de souffle diastolique; une des valvules perforée).		Artère crurale droite.
Press. max.	Press. min.	Pression du sang.
+ 82 mm. *Hg*.	+ 37 mm. *Hg*.	+ 116 mm. *Hg*.
De nouveau dans l'aorte (bruit de souffle diastolique).		Artère crurale droite.
Press. max.	Press. min.	Pression du sang.
+ 132 mm. *Hg*.	+ 128 mm. *Hg*.	+ 120 mm. *Hg*.

La pression sanguine n'avait donc pas subi de grandes variations, même pendant que le tube était engagé dans le ventricule. Mais le manomètre avait indiqué dans le ventricule une pression maximum de 82 mm. *Hg*, au même instant où la pression moyenne dans la crurale s'élevait à 116 mm. *Hg*. De ce résultat ressortait évidemment l'existence d'un défaut dans l'appareil. Aussi n'aurais-je pas mentionné ces expériences, si elles ne nous en avaient pas moins appris l'une et l'autre chose au sujet des pressions ventriculaires, comme on le verra tout à l'heure.

Antérieurement déjà, j'avais examiné les soupapes et trouvé

qu'elles fonctionnaient bien. Le défaut ne pouvait résider que dans le tube introduit dans la carotide. Je reconnus effectivement que les tubes dont je m'étais servi jusqu'alors avaient une lumière trop étroite, de sorte que la résistance y était trop forte pour que des variations *brusques* de pression fussent accusées par l'appareil.

J'ai pu apprécier expérimentalement cette influence de la largeur du tube. Prenons un ballon de caoutchouc à parois solides et muni de deux ouvertures, et relions-le à un vase de pression rempli d'eau, de telle sorte qu'entre le vase et le ballon il y ait une soupape ne s'ouvrant que du côté de ce dernier, tandis que l'eau peut s'écouler par un tube fixé à l'autre ouverture du ballon. Lorsqu'on comprimera le ballon à la main, l'eau sera expulsée avec force par le tube abducteur, et lorsqu'on le relâchera, une certaine quantité d'eau sera aspirée du vase de pression, quantité d'autant plus grande que l'orifice du tube sera placé à une plus grande distance verticale au-dessous du niveau du vase. La compression détermine dans le ballon une pression positive; le relâchement, par la détente des parois, une pression négative. En faisant se succéder rapidement la compression et le relâchement, on produira aussi une alternance rapide de pressions positives et négatives. On peut faire enregistrer ces pressions par les manomètres de notre apparail (Pl. V); il suffit de mettre le tube de cet appareil en communication avec le ballon, ce qu'on effectue aisément en fixant au tube abducteur du ballon une pièce en T, dont la branche latérale servira à l'écoulement de l'eau, tandis que l'autre branche recevra le tube de l'appareil. J'ai de cette manière essayé successivement des tubes de différents calibres intérieurs, pour apprendre à connaître l'influence de ce calibre. Avec des tubes étroits, le manomètre-maximum ne s'élève pas et le manomètre-minimum ne s'abaisse pas jusqu'aux hauteurs qui indiquent les pressions maximum et minimum réelles dans le ballon, hauteurs qu'on obtient en introduisant un tube suffisamment large. Les essais ont donc été multipliés jusqu'à ce que j'eusse trouvé le tube *le plus étroit*

avec lequel les pressions rapidement variables du ballon fussent inscrites par les deux manomètres à la même hauteur qu'elles atteignaient lorsque j'employais un tube très large.

Il ne me restait plus maintenant qu'à chercher un chien dont la carotide fût assez large pour admettre ce tube-limite. Un chien maigre, de 33 kilogr., se trouva remplir cette condition. De la manière ordinaire (ci-dessus décrite) je poussai le tube dans la carotide jusqu'à ce qu'il fût arrêté par les valvules aortiques, je le retirai de 1 cm., ouvris d'abord le robinet à maximum, puis le robinet à minimum, et obtins:

Aorte.	
Press. max.	Press. min.
+ 210 mm. *Hg*.	+ 138 mm. *Hg*.
+ 204 „ „	+ 130 „ „

Ensuite, le tube fut glissé entre les valvules, sans les blesser (les bruits du cœur restèrent normaux). Les robinets furent de nouveau ouverts successivement. Le manomètre à maximum monta encore un peu et le manomètre à minimum baissa rapidement jusqu'au-dessous de zéro. Ils indiquaient maintenant, dans le ventricule gauche:

Press. max. + 220 mm. *Hg*., Press. min. — 36 mm. *Hg*.

L'animal était en narcose morphinique et respirait normalement.

Après que les robinets *l*, *p'* et *p* eurent été fermés, on ramena le manomètre-maximum à zéro, en ouvrant le robinet *q'*, et le manomètre-minimum à une grande hauteur, en ouvrant le robinet *q* et en plaçant le flacon *F* en haut. Cela fait, ces robinets *q'* et *q* furent refermés. Le tube fixé en *a* fut de nouveau un peu retiré, jusque dans l'aorte. Le robinet *l* ayant été ouvert, on rouvrit successivement le robinet à maximum et celui à minimum. Les manomètres indiquèrent alors dans l'aorte:

Press. max. + 208 mm. *Hg*. Press. min. + 124 mm. *Hg*.
„ „ + 210 „ „ „ „ + 116 „ „

Le tube ayant été ramené dans le ventricule, en passant, comme-ci-dessus, entre les valvules aortiques, j'obtins

Press. max. + 234 mm. *Hg*. Press. min. — 38 mm. *Hg*.,

puis, en le retirant encore une fois jusque dans l'aorte:

Press. max. + 212 mm. *Hg*. Press. min. + 120 mm. *Hg*.

Dans toutes ces circonstances, les bruits cardiaques étaient restés parfaitement normaux. Je cherchai maintenant à produire une insuffisance, en poussant le tube à travers les valvules. Le résultat fut:

Dans le ventricule.

Press. max.	Press. min.
+ 232 mm. *Hg*.	— 34 mm *Hg*.

Ensuite dans l'aorte.

Press. max.	Press. min.
+ 216 mm. *Hg*.	+ 104 mm. *Hg*.

On percevait un bruit de souffle diastolique, faible et peu distinct, et l'autopsie montra que le tube avait percé l'une des valvules à sa base et y avait pratiqué une ouverture ayant environ la largeur du tube.

Trois fois encore j'eus l'occasion de répéter cette expérience, une fois, il est vrai, seulement à moitié. J'employais, en effet, un tube de verre, et lorsque, après deux déterminations de la pression aortique, je voulus le faire pénétrer dans le ventricule, il cassa, de sorte qu'un grand fragment resta engagé dans l'aorte. Le tube était du même calibre que dans l'expérience précédente.

Chien. Poids 34 kilogr.

Aorte.

Press. max.	Press. min.
+ 158 mm. *Hg*.	+ 130 mm. *Hg*.
+ 156 „ „	+ 130 „ „

Chien. Poids 18,5 kilogr. [1]).

Aorte.		Ventricule gauche.	
Press. max.	Press. min.	Press. max.	Press. min.
+ 158 mm. *Hg*.	+ 108 mm. *Hg*.	+ 168 mm. *Hg*.	— 30 mm. *Hg*.
+ 158 „ „	+ 86 „ „	+ 174 „ „	— 32 „ „
+ 162 „ „	+ 76 „ „		

Chien. Poids 26 kilogr.

Aorte.		Ventricule gauche.	
Press. max.	Press. min.	Press. max.	Press. min.
+ 158 mm. *Hg*.	+ 114 mm. *Hg*.	+ 162 mm. *Hg*.	— 28 mm. *Hg*.
+ 156 „ „	+ 112 „ „	+ 150 „ „	— 22 „ „
+ 158 „ „	+ 112 „ „	+ 176 „ „	— 30 „ „
+ 158 „ „	+ 110 „ „	+ 164 „ „	— 26 „ „

Dans ces deux cas, les déterminations furent faites alternativement dans l'aorte et dans le ventricule gauche.

Il ressort à toute évidence, de ces déterminations, qu'il existe une pression négative dans le ventricule, comme l'avaient trouvé MM. Goltz et Gaule, mais que rien ne s'en transmet à l'aorte. Dans celle-ci, le manomètre à minimum continua toujours à indiquer une pression positive considérable.

Si ces expériences fournissent la preuve directe que la pression négative en question ne peut pas se produire à la fin de la systole, comme l'a admis M. Moens, l'a même conclusion se laissait déjà déduire, avec beaucoup de probabilité, des expériences mentionnées précédemment. Dans celles-ci, en effet, les pressions aortiques maximum et minimum ne différaient entre elles que de 20 à 30 mm. *Hg*, tandis que, lorsque le tube était introduit dans le ventricule, les deux manomètres accusaient des pressions notablement, quelquefois très notablement, inférieures et la différence des pressions maximum et minimum était, dans la plupart des cas, plus forte que pour l'aorte. Un tube étroit, nous l'avons vu, ne donne pas exactement les

[1]) Quoique d'un poids médiocre, ce chien était d'assez forte taille, mais il était très amaigri, par suite d'une maladie cutanée.

pressions maximum et minimum; la succession de ces pressions est trop rapide pour qu'elles puissent se transmettre intégralement par un pareil tube; les manomètres indiquent donc une espèce de pressions moyennes, qui dépendent: 1° du calibre du tube, 2° de la valeur de chacune des deux pressions et 3° du temps pendant lequel chacune de ces deux pressions règne. Tout cela ressort des expériences où le tube était introduit dans un ballon élastique (voir plus haut). La circonstance que, avec le tube étroit, la pression maximum a été trouvée beaucoup plus basse dans le ventricule que dans l'aorte, fait donc déjà présumer qu'il s'y opère une succession rapide de pressions très différentes; cela n'a pas lieu dans l'aorte, où, en conséquence, le manomètre-maximum peut s'élever beaucoup plus haut.

Mais, ainsi que je l'ai déjà dit, les expériences mentionnées en dernier lieu sont décisives. Il en résulte, de plus, que dans l'aorte, où la pression minimum a une valeur si considérable, les ondes d'occlusion décrites par M. Moens, et qui suivant lui détermineraient quelques surélévations dans la courbe du pouls, ne peuvent *pas* prendre naissance.

La pression négative dans le ventricule ne se manifestant pas à la fin de la systole, il faut qu'elle apparaisse durant la diastole et que, par conséquent, le cœur exécute une diastole active (dans l'acception admise par nous).

Si une pareille diastole active se produit réellement, le cœur doit, pendant cette période, aspirer le sang du système veineux. Or, y a-t-il quelques preuves à donner de l'existence de cette pression dans les parties du système vasculaire qui sont situées en avant du ventricule?

MM. Goltz et Gaule ont trouvé dans l'oreillette droite une pression négative de — 11,2 mm. *Hg*, mais l'animal sur lequel ils expérimentaient avait le thorax fermé, de sorte que le résultat obtenu pourrait avoir été la conséquence d'une inspiration énergique. J'ai donc cherché à déterminer la susdite pression à thorax ouvert, en introduisant le tube dans l'oreillette par la jugulaire droite. Pour diminuer autant que possible la

perte de sang et mettre en outre le cœur à l'abri du refroidissement, je faisais dans la paroi abdominale de chiens narcotisés, sur le trajet de la ligne blanche, une incision tout juste assez grande pour qu'on pût y passer la main, puis je pratiquais dans le diaphragme, aux deux côtés, une large ouverture. La respiration, bien entendu, était entretenue artificiellement, au moyen d'un soufflet, sauf que, lors de l'ouverture des robinets de l'appareil, on la suspendait pour un certain temps, après avoir exécuté préalablement quelques insufflations énergiques. Je trouvai de cette manière:

Chien. Poids 18 kilogr.

Ventricule droit.		Oreillette droite.	
Press. max.	Press. min.	Press. max.	Press. min.
+ 25 mm. *Hg*.	— 8 mm. *Hg*.	+ 10 mm. *Hg*.	— 2 mm. *Hg*.
+ 28 „ „	— 8 „ „		
+ 26 „ „	— 6 „ „		

Chien. Poids?

Ventricule droit.	Oreillette droite.
Press. min.: — 24 mm. *Hg*.	Press. min.: —4, —6 et —2 mm. *Hg*. [1])

Chez les deux chiens suivants, on fit seulement les déterminations dans le ventricule droit.

Chien. Poids 17,5 kilogr.
Ventricule droit.

Press. max.	Press. min.
+ 40 mm. *Hg*.	— 8 mm. *Hg*.
+ 30 „ „	— 5 „ „
+ 44 „ „	— 7 „ „

Chien. Poids 21 kilogr. (dogue de forte taille).

Ce chien était curarisé, mais non complètement. La respira-

[1]) La soupape à maximum était dérangée lors de cette expérience, ce qui empêcha de déterminer la pression maximum.

tion avait lieu à l'aide d'un soufflet; le thorax était ouvert par deux larges incisions latérales. Pendant les déterminations, la respiration artificielle était suspendue, sans qu'il se produisît des mouvements respiratoires propres.

Ventricule droit.

Press, max.	Press. min.
+ 72 mm. *Hg.*	— 25 mm. *Hg.*
+ 60 „ „	— 38 „ „
+ 44 „ „	— 22 „ „

Il résulte clairement de ces expériences, de même que de celles de MM. Goltz et Gaule, que, tout à fait indépendamment de la pression négative dans le thorax, il se produit une pression négative dans le ventricule droit, laquelle peut même être assez considérable, comme le montrent les cas ci-dessus. Je crois donc pouvoir affirmer que lorsqu'on ne trouve dans le ventricule que peu ou point de pression négative, cela tient à ce que le cœur fonctionne mal. A la vérité, je n'entends attacher de valeur absolue à aucun des chiffres obtenus, ni dans le ventricule droit, ni dans le ventricule gauche; mais, ce qui est indubitable, c'est que dans tous les deux il se produit des pressions négatives, plus grandes probablement dans le ventricule gauche que dans le droit.

Une pression négative a aussi été trouvée quelquefois, comme on a pu le voir plus haut, dans l'oreillette droite, preuve évidente que la pression négative (force aspiratrice) se propage réellement du ventricule à l'oreillette [1]); cela ne peut avoir lieu, naturellement, que dans la période où les valvules auriculo-ventriculares sont ouvertes, c'est-à-dire pendant la diastole. La conclusion que nous avons dû tirer des expériences faites dans le ventricule gauche et dans l'aorte trouve donc ici une confirmation. Même dans les expériences où le manomètre à minimum n'accuse pas distinctement une pression négative dans l'oreillette, il peut s'abaisser, ainsi que je l'ai observé plusieurs

[1]) Une aspiration active de l'oreillette me paraît très improbable.

fois, jusqu'à son point zéro. Or, cela aussi a son importance. Car si, à chaque battement du cœur, une pression égale à zéro existe pendant un instant dans l'oreillette (et je parle uniquement des expériences faites à thorax ouvert), il en résulte déjà la preuve que le ventricule ne se détend *pas* en vertu de la force que le sang a conservée dans le système veineux.

En supposant pour un instant que tel fût réellement le cas, que, le thorax étant ouvert, le ventricule se détendît par la *vis a tergo* du sang, l'énergie rémanente du sang devrait se transformer dans le ventricule en pression exercée sur les parois. Durant la diastole du ventricule le sang devrait donc se trouver sous une certaine pression, tant dans le ventricule que dans l'oreillette, qui à ce moment communique librement avec lui, et cette pression devrait être supérieure à zéro, puisque autrement les parois ne seraient pas amenées à l'état diastolique. La pression zéro, donnée par l'expérience, ne pourrait donc pas se produire durant la diastole du ventricule, alors que l'oreillette aussi est déjà en diastole. A la diastole du ventricule succède la pause du cœur, et si réellement le courant du sang veineux avait encore assez de force pour faire diastoler la paroi ventriculaire, une pression zéro ne pourrait évidemment pas régner non plus dans l'oreillette durant la pause cardiaque, et beaucoup moins encore durant les phases suivantes de systole auriculaire et de systole ventriculaire. Ceux qui croient ne pas devoir admettre une diastole active pour le ventricule, l'admettront naturellement encore beaucoup moins pour l'oreillette, et par conséquent, dans la supposition ci-dessus faite, une pression zéro ne pourrait pas non plus exister dans l'oreillette durant la diastole. Ainsi, quand on veut faire naître la diastole du ventricule, le thorax étant ouvert, de la force du courant sanguin veineux, on ne peut concevoir aucune période de la révolution cardiaque où la pression intra-auriculaire pourrait être nulle. Les nombreux cas, où une pareille annulation de pression a été constatée expérimentalement, démontrent donc que d'autres causes doivent intervenir dans la production de la diastole. Et

s'il restait quelques doutes à cet égard, ils seraient entièrement dissipés par la pression franchement négative qu'on trouve de temps en temps dans l'oreillette, le thorax étant ouvert. La circonstance que très souvent cette pression négative ne s'observe pas, a été citée par quelques-uns comme argument contre la diastole active; mais elle n'a rien d'extraordinaire, en présence du fait que même dans le ventricule droit la pression négative ne s'accuse pas toujours, lorsque, à raison de l'ouverture du thorax, l'action du cœur est affaiblie par la perte de sang et le refroidissement. En outre, il est clair qu'une quantité modérée de sang, qui est chassée dans le système veineux, ou qui inversement, comme c'est le cas lors de la diastole du cœur, est aspirée du système veineux, n'y modifiera pas beaucoup la pression; les parois de ces vaisseaux ne possédant qu'un très faible coefficient d'élasticité et étant par suite très extensibles, un changement appréciable de pression n'y sera déterminé que par un très grand changement dans le volume du sang. Ainsi s'explique pourquoi, dans le système veineux (donc en avant du ventricule), nous remarquons expérimentalement si peu de chose de la pression négative qui existe dans le ventricule durant la diastole; surtout si l'on considère que, dans les gros vaisseaux veineux, le sang est encore poussé par une certaine *vis a tergo*.

Notre conclusion est donc: que le sang arrivant dans l'oreillette possède indubitablement encore une certaine énergie, qui effectue la diastole de l'oreillette, mais qui, dans les circonstances normales, est relativement faible. Quant à la diastole du ventricule, elle est indépendante de cette énergie; elle s'opère donc *activement*, le mot étant pris dans l'acception admise par nous.

Reste à savoir quelles sont, parmi les causes sus-indiquées, celles qui agissent réellement. A cet égard, je n'ose rien décider. Il est probable que plusieurs d'entre elles concourent à la production du phénomène. Ainsi, par exemple, la pression négative qui règne à l'intérieur du thorax, donc sur la face externe du cœur (Donders), exerce certainement de l'influence. Mais, indépen-

damment de celle-ci, d'autres causes encore doivent pouvoir accomplir la diastole, et, en considérant que la pression négative intra-ventriculaire est assez considérable, j'incline à l'attribuer *essentiellement* à l'action de forces élastiques, qui se sont développées dans la paroi durant la systole. A cet égard toutefois, je le répète, mes expériences n'apprennent rien. Tout ce que j'ai voulu établir, c'est que la diastole des ventricules ne se produit pas en vertu de la *vis a tergo* du sang, mais qu'il s'opère une diastole active (dans le sens indiqué), qui détermine dans les ventricules, durant cette période, une pression négative, donc une aspiration, laquelle favorise l'afflux du sang veineux vers les ventricules. Le cœur fonctionne donc comme pompe foulante et aspirante.

UTRECHT, juin 1883.

CHLOROPHYLLE ANIMALE

PAR

Th. W. ENGELMANN.

Des travaux distingués, au premier rang desquels il faut placer ceux de M. Géza Entz [1]) et de M. Karl Brandt [2]), ont, dans les derniers temps, profondément ébranlé la croyance à l'existence de chlorophylle vraiment animale. Les „corps chlorophylliens" de Rhizopodes, d'Infusoires ciliés, de Spongiaires, de Polypes, de Turbellariés sont déclarés, sur la foi d'observations et d'expériences morphologiques, physico-chimiques et biologiques, être des Algues unicellulaires, qui se trouvent, à l'égard de leurs hôtes, dans un rapport d'association analogue à celui qui, d'après M. Schwendener, unit les Algues et les Champignons dans le thallus des Lichens. Il en est de même de ce qu'on appelle les cellules jaunes des Radiolaires et des Cœlentérés, lesquelles, depuis leur découverte par Huxley, ont occasionné presque autant de cassement de tête que les „embryons" des Infusoires, embryons qui d'ailleurs ont finalement été reconnus, eux aussi,

---

[1]) Géza Entz, *Ueber die Natur der „Chlorophyllkörperchen niederer Thiere* (En hongrois, 25 févr. 1876; en allemand, dans *Biol. centralblatt*, I, N°. 21, p. 646, 20 janv. 1882).

[2]) Karl Brandt, *Ueber das Zusammenleben von Thieren und Algen* (*Verh. d. physiol. Gesellsch.*, Berlin, 18S1, 11 nov.; *Biol. Centralbl.*, I, N°. 17, p. 524). — *Ueber die morphologische und physiologische Bedeutung des Chlorophylls bei Thieren*, 1er article dans *Archiv für* (*Anat u.*) *Physiol.*, 1882, p.125—151, Pl. I. — 2e article dans *Mittheilungen u. d. zoolog. Station zu Neapel*, IV, 1883, p. 191—302, Pl. 19 et 20.

pour n'être que des hôtes — non payants, il est vrai, — de ces animaux.

On ne peut pas dire que les savants, tels que Ray Lankester et Geddes, qui ont combattu la nouvelle doctrine de la nature végétale des cellules vertes et jaunes, aient été heureux dans leurs efforts. Sans doute, beaucoup des arguments produits en faveur des idées nouvelles ne sont pas péremptoires. En outre, le fonds des objections possibles ne me paraît encore nullement épuisé. Mais, au total, les faits qui se laissent expliquer exclusivement, ou du moins mieux que d'autre manière, par la nouvelle théorie, sont si nombreux et si divers, que la continuation de la lutte semble à la plupart des observateurs n'avoir pour le moment aucune chance de succès.

Personne ne s'étonnera non plus que, dans l'ardeur de la recherche et sous l'impression des résultats imprévus auxquels ils étaient conduits, les investigateurs aient tiré des conséquences qui, intentionnellement ou non, dépassent les limites autorisées par les faits constatés. C'est ainsi que M. Karl Brandt, au début de son dernier et excellent travail [1]), en résumant les résultats généraux de ses recherches antérieures, avance entre autres les propositions suivantes, d'une vaste portée:

„Jamais il n'y a, chez les animaux, de chlorophylle formée par eux-mêmes." „Les plantes sont capables de transformer la matière inorganique en matière organique." „Les animaux, au contraire, qui ne possèdent pas de chlorophylle, ne peuvent se nourrir que de matières organiques, qu'ils empruntent, directement ou indirectement, aux végétaux". „Lorsque de la chlorophylle se trouve chez les animaux, sa présence est due à des algues unicellulaires."

Ces assertions donnent l'idée que la chlorophylle serait exclusivement un produit végétal. Et telle est effectivement l'opinion de M. Brandt, car plus loin il affirme encore expressément la nature végétale spécifique de toutes les chromophylles assimi-

---

[1]) *L.c.*, 2e article, p. 191.

latrices en général [1]). Mais, évidemment, tout ce qui est permis, c'est de reconnaître que le contraire des susdites assertions n'est pas encore démontré jusqu'ici.

A la lecture des propositions de M. Brandt, des objections s'élevèrent immédiatement dans mon esprit, car je me rappelais avoir rencontré une fois, il y a bien des années, des Vorticelliens dont le corps n'était pas coloré par des grains de chlorophylle, mais présentait une coloration verte diffuse, semblant due à de la chlorophylle imbibée. Comme, à cette époque, personne ne doutait de l'existence de vraie chlorophylle animale, je n'accordai pas autrement d'attention à ce fait. Aujourd'hui, la situation ayant changé, un nouvel examen était nécessaire. En supposant que je parvinsse à retrouver les animalcules, la méthode des bactéries surtout promettait des résultats décisifs.

Dans les écrits, tant anciens que modernes, relatifs à la matière, écrits dont la collection assez complète était à ma disposition, je ne trouvai indiqué nulle part que les formes vertes en question eussent déjà été remarquées par d'autres observateurs et, du moins au début, tous mes efforts pour retrouver ces formes, ou d'autres analogues, parurent aussi devoir rester sans succès. Finalement pourtant, le 20 avril de cette année, en passant la revue d'un lot de Vauchéries que je venais de retirer du bras du Rhin qui coule directement derrière le laboratoire, j'aperçus, entre de nombreux exemplaires incolores de *Vorticella campanula* et *nebulifera*, quelques Vorticelles présentant distinctement une couleur verte diffuse. Par l'aspect général, les dimensions et les détails de structure, elles ressemblaient le plus à la *Vorticella campanula* incolore, et elles étaient aussi, comme celle-ci et les autres Vorticelliens présents (*Carchesium polypinum*, *Epistylis plicatilis*), presque toutes fixées par de longs pédoncules à la surface externe des tubes de Vauchéries. Elles se trouvaient indifféremment sur les parties mortes comme sur les parties fraîches et vertes de ces filaments. Malheureusement elles étaient

[1]) *Ibid.* p. 273.

très peu nombreuses: sur 20 préparations, il y en avait à peine une qui contînt un ou quelques individus, contre des centaines de Vorticelliens incolores.

Indépendamment de leur coloration verte, elles se distinguaient de la plupart des exemplaires de *V. campanula* en ce que les anneaux transversaux de leur corps étaient beaucoup plus serrés et plus fins. Mais un caractère physiologiquement important, en ce qu'il indiquait le pouvoir d'assimiler à la manière des végétaux, c'était la transparence plus grande de leur endoplasme, provenant du manque relatif de matières alimentaires solides. Les „bols alimentaires'' avaient, il est vrai, à peu près la même grandeur (variable du reste entre d'assez larges limites) et la même forme exactement sphérique que chez d'autres Vorticelliens; ils circulaient aussi de la même manière dans l'endoplasme, et leur nombre ne paraissait pas être moindre. Mais leur contenu consistait le plus souvent en une petite masse, assez transparente, de détritus incolores, dans laquelle on ne voyait que par exception une petite Algue verte, un débris de Diatomacée, ou quelque chose d'analogue. Jamais je n'y ai observé de micro-organisme coloré encore vivant, ce qui peut toutefois avoir été un simple effet du hasard; je n'en ai pas vu non plus dans l'endoplasme où nagent les bols alimentaires, ni dans aucune autre partie du corps, et, plus géneralement, nulle trace d'éléments figurés, tels que gouttelettes de graisse, granules d'amidon, cristalloïdes, ne se laissait découvrir.

La matière colorante verte était exclusivement propre à l'ectoplasme, c'est-à-dire, à la soi-disant cuticule et à la couche protoplasmatique qui s'étend entre la cuticule et la couche myophanique. Chez les animaux qui venaient d'être retirés du fleuve, la coloration était d'abord e n t i è r e m e n t h o m o g è n e, comme dans les chromatophores des plantes, mais, en général, notablement plus pâle que celle de la plupart des corps chlorophylliens, l'épaisseur de la couche active étant supposée la même. Proportionnellement le plus saturée dans la cuticule, elle était très pâle dans la couche subcuticulaire et y devenait même

parfois, sous l'éclairage naturel le plus favorable et sous un fort grossissement, incertaine ou à peine perceptible. Cette couche subcuticulaire doit être étudiée dans le tiers postérieur du corps, où elle s'épaissit assez rapidement vers le muscle pédonculaire, et où en outre, l'endoplasme digestif et ses bols alimentaires ne s'étendant pas jusque-là, elle est d'un accès optique plus facile.

La coloration faisait entièrement défaut, même quand le ton général de l'animal était d'un vert très vif, à la surface du disque de l'organe vibratile; tandis que le péristome, au contraire, était presque toujours la partie du corps teinte du vert le plus intense. Ce contraste ressortait surtout très nettement au moment de la contraction.

L'endoplasme tout entier, de même que le long noyau en fer à cheval, ne paraissait contenir aucune trace de matière colorante.

La plupart des exemplaires que j'ai observés présentaient à peu près la même intensité de coloration. Deux fois je trouvai un groupe nombreux d'individus dont quelques-uns étaient décidément d'un vert plus saturé que les autres, ces derniers étant d'ailleurs égaux en couleur, sauf un petit nombre, qui n'étaient que très faiblement colorés; çà et là je trouvai aussi des exemplaires isolés, pour lesquels il pouvait rester douteux s'ils renfermaient, oui ou non, de la matière colorante. Plus loin nous apprendrons à connaître des circonstances dans lesquelles la couleur disparaît, ainsi que d'autres où la matière colorante se distribue d'une manière différente et très caractéristique.

Il s'agissait maintenant, avant tout, de savoir si l'on avait réellement affaire ici à de la chlorophylle vivante, ou du moins à une vraie chromophylle [1]) assimilatrice. Cette question, la méthode des bactéries était seule en état de la résoudre. Car, en admettant que par quelque autre voie (analyse

[1]) Sous ce nom, j'ai réuni toutes les matières colorantes qui assimilent, à la manière de la chlorophylle, sous l'influence de la lumière. Voir *Farbe und Assimilation*, dans *Bot. Zeit.* 1883, N°. 2, *Arch. Néerl.*, t. XVII, pag. 29.

spectrale, réactions microchimiques) on pût démontrer l'identité de notre matière colorante et de la chlorophylle, il n'était pas possible de décider ainsi si cette matière existait, dans les Vorticelles, à l'état vivant, c'est-à-dire, avec la faculté de décomposer l'acide carbonique à la lumière, en dégageant de l'oxygène. Le contraire aussi était concevable. On sait, en effet, que la chlorophylle végétale dissoute, incapable d'assimilation, donne essentiellement le même spectre et les mêmes réactions de couleur, sous l'influence des agents chimiques, que la chlorophylle assimilatrice du grain chlorophyllien vivant. Le dégagement d'oxygène à la lumière devait donc être constaté. Pour cela, je procédai de la manière suivante.

A une goutte qui, à part une Vorticelle d'un vert vif, fixée à un rameau de Vauchérie mort et dépourvu de chlorophylle, contenait à peine quelque autre organisme, j'ajoutai un peu de liquide à bactéries, riche surtout en Mesococcus bien mobiles et assez sensibles à l'oxygène. La goutte ayant été couverte d'une lame de verre, et celle-ci lutée à la vaseline, l'objet fut porté sous le microscope, dans l'enceinte obscure. A ce microscope, l'appareil ordinaire d'éclairage était remplacé par l'objectif microspectral décrit antérieurement [1]) et dont la fente fut élargie au maximum. Au moyen de la vis de centrage, le spectre fut ajusté de telle sorte que la Vorticelle, fixée au milieu du champ visuel, se trouvât dans la région du jaune et de l'orangé. Pour la projection du spectre, je me servais de l'objectif *B* (dist. foc. réd. 11 mm.) de Zeiss, pour l'observation, de l'objectif *D* (dist. foc. réd. 4,3 mm.), et comme source lumineuse j'employais un grand disque de verre mat, éclairé par le soleil. On avait d'ailleurs soin, en changeant la hauteur de la fente et en déplaçant l'objet, d'empêcher que, sauf la Vorticelle verte, aucun autre micro-organisme capable

---

[1]) *Ueber Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospectrum*, dans Pflüger *Arch. f. Phys.*, t. XXV, 1882, p. 258; *Bot. Zeit.*, 1882, N°. 26; *Onderzoekingen* etc. (3) VII, 1882, p. 190. — Voir aussi *Catalog* Nr. 26 *der optischen Werkstätte von* Carl Zeiss *in* Jena, 1883, Nr. 85, p. 51.

d'assimilation ne vînt à tomber dans la lumière du spectre [1]).

Entretemps, le jeu de l'organe vibratile de l'animal s'était graduellement si fort ralenti, que c'est à peine s'il se manifestait encore un tournoiement dans l'eau, et que notamment dans la région entre le péristome et l'extrémité du pédoncule, au voisinage immédiat de la surface du corps, l'eau était en repos. Temporairement, les cils vibratiles cessaient même de s'agiter.

Or, dans ces conditions, il se produisit autour du corps de la Vorticelle, environ dans l'espace d'un quart d'heure, une accumulation très distincte de bactéries mobiles. Elle s'étendait de l'extrémité orale à l'extrémité aborale, et était la plus forte dans le sillon situé immédiatement derrière le péristome. En cet endroit, il y avait continuellement de dix à vingt bactéries se livrant aux mouvements les plus vifs et les plus variés. A une plus grande distance de l'animal, on ne voyait que çà et là une forme mobile.

Comme un des bols alimentaires contenait un petit débris végétal vert, je changeai la situation de la Vorticelle par rapport au spectre, de manière qu'il n'y eût plus d'éclairé que l'ectoplasme longeant l'un des bords latéraux du corps. Une minute était à peine écoulée, que déjà les petits Schizomycètes s'étaient nettement accumulés le long de ce bord. La totalité du champ visuel ayant alors été subitement éclairée, par l'abaissement rapide de l'appareil microspectral, on put constater que près des autres parties de la surface du corps, restées jusque-là dans l'obscurité, il n'y avait que des bactéries très isolées et, de plus, peu ou point mobiles.

---

[1]) C'est un point auquel, dans la circonstance présente comme dans tous les cas analogues, il faut veiller tout spécialement. Parfois, après qu'on a cru s'être assuré de leur absence, on découvre de pareilles sources cachées d'oxygène, en scrutant minutieusement les points vers lesquels le mouvement des bactéries est principalement dirigé, ou dans lesquels il est partiulièrement vif. Plus d'une fois j'ai tronvé ainsi, sous une Vorticelle, une chétive Algue verte, presque entièrement soustraite à la vue par les bols alimentaires de l'endoplasme.

Une accumulation évidente s'observait également quand on n'éclairait que le tiers postérieur du corps, ou le tiers antérieur avec le péristome. Lorsque les rayons frappaient seulement l'organe vibratile incolore (jusqu'au bord antérieur du péristome), ou seulement le pédoncule, ils n'exerçaient pas d'action appréciable, d'où l'on pût conclure au dégagement d'oxygène.

Les phénomènes que je viens de décrire ont plus tard été vérifiés encore plusieurs fois, chez d'autres individus présentant la coloration verte diffuse.

Il est donc indubitable que nos Vorticelles possèdent la propriété de dégager de l'oxygène à la lumière, au moyen de la matière colorante verte répandue d'une manière diffuse dans leur ectoplasme. Nous aurions donc réellement ici les premiers animaux authentiques assimilant au moyen d'une chromophylle unie à leur propre plasma vivant, et non par l'intermédiaire d'hôtes végétaux.

Indépendamment de la mobilisation et de l'accumulation des bactéries, l'action assimilatrice de la matière colorante verte s'accusait souvent aussi, et, à ce qu'il m'a semblé, d'une façon non équivoque, par la circonstance que le mouvement des cils vibratiles, préalablement éteint dans l'obscurité, recommençait ou du moins devenait beaucoup plus énergique à la lumière, pour décroître de nouveau rapidement quand celle-ci était interceptée. De semblables alternatives de repos et de mouvement s'observant toutefois très fréquemment aussi en dehors de l'influence de la lumière et de l'obscurité, notamment chez les Vorticelles mourantes, j'attache beaucoup moins de valeur à cette réaction qu'aux résultats positifs de la méthode des bactéries.

Du reste, il faut le déclarer expressément, la réaction bactérienne était, même dans le cas le plus favorable, encore relativement faible, et nullement comparable à celle produite par des Infusoires qui hébergent, en quelque abondance, des „corps chlorophylliens" vivants.

Pour plus d'une raison, il n'y a pas lieu de s'en étonner.

D'abord, la matière colorante assimilatrice est, dans notre cas, répandue en quantité manifestement très faible sur une surface relativement très grande. En second lieu, nos Vorticelles font une consommation extraordinaire d'oxygène libre. Une partie de l'oxygène qu'elles ont produit à la lumière — partie probablement de beaucoup la plus grande — est donc immédiatement fixée et ne peut s'échapper au dehors. Ce point demande quelques éclaircissements spéciaux.

Comparées à la plupart des autres Infusoires, les Vorticelles ont, en général, un besoin très vif d'oxygène. On peut déjà s'y attendre à priori, vu l'extrême développement de leurs organes de travail (spirales vibratiles, myophanes, muscle pédonculaire, endoplasme contractile). Mais il est facile aussi d'en donner la preuve directe, par la voie de l'observation et de l'expérience.

Les Vorticelliens qui errent librement dans une eau tranquille se rassemblent toujours, de préférence, à la surface. Si l'on puise, dans une rivière ou un fossé, de l'eau contenant des plantes chargées de touffes de *Vorticella nebulifera* ou de *Carchesium polypinum*, et qu'on l'abandonne au repos dans un vaisseau plat (à la lumière diffuse du jour ou à l'obscurité), presque tous les animaux se détachent, dans l'espace de quelques heures, de leurs pédoncules, se rassemblent à la surface de l'eau et s'y fixent en bandes nombreuses. — Beaucoup d'espèces vivent en parasites sur des animaux qui eux-mêmes se tiennent volontiers à la surface de l'eau, ou qui du moins se meuvent habituellement avec rapidité dans ce liquide (*Epistylis digitalis* et autres sur des Copépodes, *Opercularia articulata* et autres sur des Coléoptères aquatiques et tout particulièrement, comme Rösel l'avait déjà remarqué au siècle précédent, à leur extrémité aborale, qui vient fréquemment en contact direct avec l'air); beaucoup d'autres Vorticelliens se trouvent de préférence sur les feuillets branchiaux de Crustacés, *l'Epistylis aerophila* Stein choisit même les branchies de différents Cloportes terrestres.

Encore plus démonstratives sont les données expérimentales

suivantes. Si une goutte contenant quelques Vorticelliens est isolée hermétiquement, au moyen d'un lut, sous le couvre-objet, de manière que les animaux trouvent à la vérité de la nourriture et de l'espace pour se mouvoir librement, mais qu'aucun nouvel apport d'oxygène ne puisse avoir lieu, ils commencent bientôt, à mesure que l'oxygène dissous dans l'eau est consommé, à mourir, en présentant les phénomènes suivants: la forme du corps s'arrondit; les cils vibratiles ralentissent leur mouvement et battent l'eau avec moins de force; la vacuole contractile se dilate de plus en plus, se resserre à des intervalles plus longs; le muscle pédonculaire est agité de secousses plus rares, se relâche plus lentement, enfin ne se contracte plus qu'après une forte stimulation et, même alors, souvent en partie seulement; la substance du corps perd de sa transparence, le noyau s'assombrit et par là devient plus distinct. Finalement la mort survient, d'une manière ordinairement assez subite et avec les apparences d'une production d'acide rapidement exagérée, l'assombrissement du corps éprouvant une forte accélération (bientôt suivie d'un gonflement partiel), la couche myophanique se contractant énergiquement et le corps prenant une forme à peu près globuleuse. En même temps, le corps se détache ordinairement de son pédoncule. Chez nos Vorticelles vertes, la coloration disparaît quand elles meurent.

Tous ces phénomènes peuvent être retardés de plusieurs jours, ou même de plusieurs semaines, si, avant de luter la goutte, on y ajoute un certain nombre d'algues vertes, bien vivantes (j'employais le plus souvent des *Cladophora*, des *Spirogyra* ou des *Vaucheria*), et que journellement on expose la préparation à la lumière diffuse du jour. Si les préparations sont conservées dans l'obscurité, les Vorticelles meurent presque sans exception dans l'espace de vingt-quatre heures. Lorsque, après une privation de lumière de plus courte durée, elles sont très malades, on peut les guérir complètement par l'éclairement énergique et prolongé des algues vertes.

Quand la goutte renferme des Vorticelliens errant librement, —

ce qui est le cas ordinaire après que les animaux ont passé une demi-heure, ou plus, sous le couvre-objet, — et qu'on n'éclaire qu'un seul filament d'algue verte, sur une étendue bornée, ils se rassemblent bientôt sur la partie éclairée du filament, à la surface de laquelle ils glissent dans tous les sens, comme en tâtonnant [1]). On les voit ensuite s'élancer de nouveau vers l'obscurité, probablement dès que leur faim d'oxygène est suffisamment apaisée, puis revenir ordinairement très vite, s'éloigner de nouveau au bout de quelques instants, et ainsi de suite.

Sous ces divers rapports, nos Vorticelles vertes se comportaient essentiellement de la même manière que les Vorticelles incolores qui les accompagnaient dans la goutte. Elles paraissaient toutefois dépérir encore un peu plus vite que ces dernières, lorsque, dans l'obscurité, l'oxygène commençait à manquer.

Cette observation se concilie parfaitement avec le résultat fondamental obtenu ci-dessus. Car si, à la lumière, les Vorticelles vertes préparent encore elles-mêmes de l'oxygène, s'ajoutant à celui qui leur vient du dehors, il est probable qu'elles sont normalement „accordées", c'est-à-dire adaptées, à une plus haute tension de l'oxygène, en d'autres termes, que la pression minimum de l'oxygène, sous laquelle elles puissent continuer à vivre, est (de même que l'optimum de cette pression) plus élevée pour elles que pour les Vorticelles incolores de l'espèce la plus voisine. Une différence analogue existe entre le *Paramecium bursaria* [2]) vert et le *Paramecium ambiguum* incolore, comme probablement aussi, en général, entre les organismes à chromophylle et les organismes sans chromophylle, dès que,

---

[1]) Ils peuvent ainsi, pour le dire en passant, devenir très gênants dans la détermination de l'énergie assimilatrice des rayons de différentes réfrangibilités, par la méthode des bactéries. On ne devra donc employer, pour cet objet, que des liquides à bactéries exempts de Vorticelles. La *V. microstoma* est celle dont il y a le plus lieu de tenir compte, car elle est très fréquente dans les infusions putrescentes.

[2]) *Ueber Licht- und Farbenperception niederster Organismen*, dans Pflüger *Arch. f. Phys.* XXIX, 1882, p, 387; *Arch. Néerl.*, t. XVII, 1882, p. 422. — Depuis lors, j'ai fait sur ce sujet de nouvelles observations, non encore publiées.

chez les premiers, la matière colorante est accumulée en telle quantité et en des points tels, qu'elle contribue pour une part notable, dans les conditions biologiques normales, à l'oxygène nécessaire à la santé de l'organisme.

La mort rapide des Vorticelles vertes, aussitôt que la tension de l'oxygène diminue dans la goutte, est une dernière raison pour laquelle il est souvent difficile d'obtenir une réaction bactérienne très nette. En aucun cas il ne convient d'employer des Schizomycètes adaptés à une très faible tension de l'oxygène (tels que beaucoup de très petits Coccus et bâtonnets, de petites Spirilles, etc. [1]). Ceux-ci se meuvent ordinairement encore partout dans la goutte, lorsque déjà les Vorticelles sont étouffées et, par suite, devenues incolores.

D'autres expériences furent maintenant instituées en vue de savoir si la matière colorante de nos Vorticelles était identique à la chlorophylle des plantes, ou bien si elle constituait une chromophylle spéciale, analogue seulement à la chlorophylle.

Pour l'œil, la coloration n'avait absolument rien qui la distinguât de celle de la chlorophylle en couches très minces. Comme celle-ci, elle était franchement vert-jaunâtre. Si je l'ai toujours appelée verte, ce n'est que pour abréger. Tout à l'heure nous apprendrons à connaître aussi des circonstances dans lesquelles elle apparaît à un plus haut degré de saturation et dans un ton décidément plus vert, tout comme la couleur de la chlorophylle dans les cas analogues.

Pour l'investigation plus précise, différentes voies se présentaient. En premier lieu, l'examen de l'énergie assimilatrice dans les différentes couleurs du spectre, suivant la méthode antérieurement décrite de l'observation suc-

[1]) *Zur Biologie der Schizomyceten*, dans Pflüger, *Arch. f. Phys.*, t. XXVI, 1881, p.537.

cessive [1]). Cet examen fit voir que, de même que pour la chlorophylle, la réaction bactérienne se produisait encore, dans la lumière rouge, avec une fente beaucoup plus étroite que dans la lumière verte. Il était plus difficile de constater si un second maximum existe dans le bleu de la lumière solaire, comme je l'ai trouvé pour les cellules végétales vertes [2]); la variabilité et le petit nombre des objets d'étude, ainsi que l'inconstance du soleil, ne me permirent pas de faire cette constatation. On y réussirait peut-être mieux en employant un spectre microscopique diffractif. Malheureusement je n'étais pas en possession d'un appareil complètement satisfaisant pour cet objet.

Ces expériences avaient donc seulement confirmé cette loi générale [3]), que les cellules à chromophylle dégagent, dans la lumière de même couleur qu'elles, moins d'oxygène que, toutes choses égales d'ailleurs, dans la lumière de couleur complémentaire.

En conséquence, je recourus à l'analyse de la couleur au moyen de l'oculaire microspectral de Zeiss. Avec les individus normaux, d'un vert diffus tout à fait uniforme, je ne réussis pas à obtenir le spectre caractéristique de la chlorophylle. Parfois seulement, il paraissait y avoir un léger obscurcissement dans la région de la première bande et dans le bleu et le violet.

Plus de certitude fut acquise par l'examen d'individus ayant vécu dans des conditions un peu anomales, qui seront précisées tout à l'heure, et se distinguant des individus normaux en ce que leur matière colorante s'était rassemblée sous la forme de gouttes d'un vert saturé.

Tous les exemplaires retirés, le 20 avril, de l'eau qui venait

---

[1]) *Ueber Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospectrum*, dans Pfluger, *Arch. f. Phys.*, t. XXVII, 1882, p. 487. — *Onderzoekingen* etc. (3), t. VII, p. 190. — *Bot. Zeit.*, 1882, N°. 26.

[2]) *Farbe und Assimilation*, dans *Bot. Zeit.*, 1883, N°. 13, *Arch. Néerl.*, t. XVII. — *Onderzoekingen* etc. (3) VII, p. 194, 219 et 220.

[3]) *Farbe und Assimilation*, dans *Bot. Zeit.*, 1883, N°. 2. — *Arch. néerl.*, t. XVII. — *Onderzoekingen* etc., (3) VII, p. 222.

d'être puisée dans le fleuve, ne contenaient, comme aussi dans les cas analogues postérieurs, que de la matière colorante verte diffuse. L'eau ayant alors été introduite avec quelques touffes de *Vaucheria* dans une capsule de porcelaine haute d'environ $0^{m},1$ et large de $0^{m},2$, puis exposée, sur la table de travail, à la lumière diffuse du jour, la vie animale et végétale s'y maintint parfaitement, durant des semaines entières. Dès le 21 avril, toutefois, les Vorticelles vertes étaient plus rares, et chez le petit nombre d'exemplaires que je trouvai, parfois après des heures de recherche, la matière colorante verte s'était condensée en petits globules fortement réfringents, entre lesquels l'ectoplasme, précédemment coloré, paraissait maintenant tout à fait incolore. Ces mêmes observations, je les ai encore faites plus tard. On peut aussi suivre directement la formation graduelle des globules verts, en examinant d'une manière assidue, au microscope, un exemplaire primitivement d'un vert uniforme.

Les globules se trouvaient tous dans l'ectoplasme, à savoir, dans la cuticule ou immédiatement au-dessous d'elle, et plus tard en majeure partie extérieurement sur la cuticule, quelquefois rapprochés par 3 ou 4 dans les fins sillons transversaux. Ils étaient distribués assez uniformément sur la surface du corps. Au péristome, leur nombre était ordinairement le plus grand; sur le disque de l'organe vibratile je n'en trouvai jamais, à une seule exception près.

Leur grandeur variait depuis des dimensions infinitésimales jusqu'à tout au plus $0,6\mu$. La forme, le pouvoir réfringent, la consistance étaient ceux de gouttelettes d'huile. Quand on comprimait l'animal, au moyen du verre qui le recouvrait, un grand nombre des gouttelettes restaient ordinairement attachées à ce verre et au porte-objet. Aussi peut-on supposer que l'exception unique, mentionnée ci-dessus, provenait de ce que le péristome richement chargé de gouttelettes colorées, en se resserrant spasmodiquement lors de la rétraction de l'organe vibratile incolore, avait pressé quelques-uns des globules avec tant de force sur cet organe, qu'ils y étaient restés adhérents lors du relâchement.

Les petits globules paraissaient pouvoir se réunir en globules plus gros, car il m'a semblé quelquefois, en observant pendant longtemps, que le nombre des gros globules s'augmentait aux dépens de celui des petits. — Quant à une division des gros globules en plus petits, je ne l'ai jamais observée.

La matière colorante pouvait s'accumuler encore d'une autre manière, sous forme de gouttes. L'animal étant placé sous le couvre-objet, il se formait à sa surface, souvent en moins de une ou deux minutes, des gouttes hémisphériques d'une substance manifestement d'un vert homogène, qui réfractait la lumière assez faiblement, mais pourtant avec plus de force que l'eau. Ces gouttes apparaissaient surtout au péristome et aux côtés du corps. Elles correspondent évidemment aux „gouttes albumineuses" incolores qui, dans les mêmes circonstances, aux mêmes places et de la même manière, sortent de l'ectoplasme chez beaucoup d'Infusoires, notamment aussi chez les Vorticelliens (*V. campanula*, *Epistylis galea*, *E. flavicollis* etc.)

Les gouttes vertes s'accroissaient quelquefois rapidement jusqu'à un diamètre de 5—10μ, auquel elles se maintenaient alors pendant beaucoup d'heures. Fréquemment elles contenaient, animé de mouvements browniens très vifs, un des gros globules, ou un groupe des petits globules oléagineux et d'un vert intense que nous avons décrits plus haut. Quelquefois on peut observer comment les grosses gouttes claires naissent graduellement autour d'un de ces gros globules. C'est alors comme si la partie de la cuticule qui entoure celui-ci se liquéfie, pour s'arrondir autour de lui en une goutte, dans laquelle le globule nage librement, isolé du reste de l'ectoplasme.

Or, de ces gouttes plasmatiques, — on peut les appeler ainsi pour les distinguer des petits globules oléagineux, — les plus grosses et les plus intensement colorées, examinées au moyen de l'oculaire spectral [1]), donnèrent une absorption limitée

---

[1]) En employant la lumière concentrée d'une forte flamme de gaz, le condenseur d'Abbe sans diaphragmes et la lentille à immersion *L* de Zeiss, avec tube rentré.

dans le rouge, environ entre *B* et *C*, et une absorption continue à l'extrémité la plus réfrangible, environ depuis *F*. Malheureusement, l'expérience manquait souvent, à cause des mouvements de l'animal, qui faisaient sortir l'image du globule de la fente oculaire.

Il est clair que dans ces cas la matière colorante verte n'était plus unie à du plasma vivant mais dissoute dans un liquide. Ce qui le prouvait d'ailleurs tout spécialement, c'est que, chez aucun des individus dont le vert s'était accumulé en gouttes et en globules, je ne pus constater une trace de dégagement d'oxygène à l'aide de la méthode des bactéries. Plus de cinquante de ces exemplaires ont été examinés à ce point de vue, et tous ont donné un résultat complètement négatif, ou du moins tout à fait douteux.

Rien ne garantit donc directement que la matière colorante sous la forme dissoute soit identique à la matière primitive, apte à assimiler. Mais ce n'est pas là une objection contre l'identité entre cette dernière et la chlorophylle végétale. Car celle-ci, comme ou le sait, montre également dans beaucoup de ses solutions un spectre foncièrement le même que celui du grain chlorophyllien. Or, d'après ce qui précède, ce spectre ne paraît pas différer de celui des solutions de notre corps dans les gouttes plasmatiques.

Le fait même, que la matière colorante se sépare en gouttes, ne plaide nullement contre son assimilation à la chlorophylle. M. Pringsheim [1]), en effet, l'a observé se produisant d'une manière entièrement analogue et dans des conditions variées (action de la chaleur, action de l'acide chlorhydrique étendu), chez les grains de chlorophylle de plantes très diverses.

On ne peut pas non plus regarder comme une objection la circonstance que, même à l'aide de l'excellent appareil d'Abbe pour l'examen microscopique à la lumière incidente, je n'ai

---

1) N. Pringsheim, *Ueber Lichtwirkung und Chlorophyllfunktion in der Pflanze*, dans: *Jahrbuch für wissenschaftliche Botanik*, t. XII, 1881, p.289 et suiv., pl.XXVI.

pas réussi à découvrir des phénomènes non équivoques de fluorescence sur nos globules et nos gouttes vertes, même sur les plus grosses. Car je n'ai pas réussi davantage en opérant, de la même manière, sur des couches au moins 10 fois plus épaisses des solutions alcooliques les plus concentrées de la chlorophylle (de *Vaucheria*).

Il y avait naturellement encore beaucoup moins de chances d'obtenir des résultats positifs avec des Vorticelles dont la matière colorante se trouve encore répandue à l'état diffus dans l'ectoplasme. Les corps chlorophylliens verts, beaucoup plus saturés, des plantes que j'ai examinées sous ce rapport (*Spirogyra*, *Vaucheria*, *Sphagnum*, *Selaginella*, *Hedera helix*, etc.), ne m'ont pas non plus donné la moindre trace de fluorescence. Et personne d'autre, que je sache, n'est jusqu'ici parvenu à observer ce phénomène sur des grains chlorophylliens isolés.

Par contre, une série de réactions microchimiques out fourni de nouveaux et importants arguments à l'appui de l'identité entre notre vert de Vorticelle et la chlorophylle.

Lorsque j'introduisais avec précaution sous le porte-objet, par aspiration au moyen d'une bande de papier à filtre, de l'acide sulfurique concentré, la Vorticelle verte, au moment de l'arrivée du réactif, se crispait de la manière connue, et restait convulsivement contractée, le péristome fermé, sur son pédicule resserré en spirale aussi étroite que possible. Bientôt son corps se ratatinait jusqu'à ne plus occuper qu'environ le tiers ou le quart du volume primitif, la surface se plissait et se ridait fortement, et le pouvoir réfringent augmentait en proportion notable. Aussitôt aussi, le corps changeait de couleur et devenait jaune-brunâtre, ordinairement avec une nuance très prononcée de rouge-pourpre. L'acide continuant à arriver, le ton jaune-brunâtre sautait brusquement au bleu-verdâtre ou au bleuâtre; au même instant, toutefois, l'animal se gonflait déjà, se décolorait rapidement, et tombait en diffluence.

Si, dès que le ratatinement et la coloration jaunâtre se sont produits, on arrête l'accès ultérieur de l'acide concentré, par une prudente aspiration en sens inverse, l'animal se con-

serve longtemps dans cet état, sans nouveau changement [1]).

L'acide chlorhydrique concentré m'a paru agir à peu près comme l'acide sulfurique concentré. Mais je n'ai pu faire avec lui que deux expériences. Les acides sulfurique, chlorhydrique, acétique et formique étendus déterminèrent la mort des animalcules, avec disparition de la matière colorante, comme dans la mort „spontanée" (*voir* plus haut). Dans l'alcool et l'éther concentrés cette matière disparaissait également; il en était de même des gouttelettes et des globules plasmatiques sus-mentionnés, qui en se fondant laissaient initialement, à ce qu'il m'a semblé, un très faible résidu incolore.

Parmi toutes ces réactions, la production, par l'acide sulfurique concentré, d'abord d'une matière colorante jaune insoluble dans l'acide, ensuite d'une matière bleue passant du stroma gonflé dans l'acide concentré ambiant, est un indice assez décisif de l'identité entre notre matière colorante et la chlorophylle. Que l'une et l'autre se comportent essentiellement de la même manière en présence de l'acide sulfurique, c'est ce dont je me suis encore assuré expressément sur les chromatophores des *Vaucheria*, *Spirogyra*, *Bulbochaete* et *Cladophora* qui vivaient dans la même eau. Chez ceux-ci, à la vérité, le ratatinement et le gonflement étaient en général beaucoup moindres. Mais cela dépend, sans aucun doute, de la différence de constitution des stromata. Même parmi les chromatophores des plantes, il existe sous ce rapport, comme on sait, des différences notables [2]).

Ce qui pourrait sembler plus grave, c'est que, chez les objets végétaux pris pour termes de comparaison, le jaune apparaissant au début de l'action de l'acide sulfurique concentré n'avait jamais la nuance de rouge-pourpre qui était généralement si frappante chez nos Vortieelles vertes. Mais il était possible que ce ton rougeâtre provînt de la présence du sucredans le corps de l'Infusoire, et que ce sucre luimême

[1]) Dans cet état, une étude spectroscopique plus exacte serait peut-être possible.

[2]) Voir, entre autres, les recherches que vient de publier M. Arth. Mayer: *Das Chlorophyllkorn* etc. Leipzig, 1883, p. 26 et suiv.

fût un produit d'assimilation de la chlorophylle!

Ce point avait évidemment une importance capitale. Pour l'éclaircir, je voulus m'assurer d'abord si les Vorticelliens incolores ne prendraient pas également une coloration rougeâtre sous l'influence de l'acide sulfurique concentré. A cet effet, des différentes espèces qui vivaient en grande quantité dans la même eau, sur les mêmes Vaucheries (*Vorticella campanula*, *V. nebulifera* [1]) *Carchesium polypinum*, *Epistylis plicatilis*), autant d'individus que possible (de la *V. campanula* beaucoup plus de cent) furent soumis à l'expérience. Dans tous les cas, le résultat fut négatif. Les animaux restaient toujours, jusqu'à leur diffluence, complètement incolores, d'où ressortait en outre une nouvelle preuve que la coloration jaune, plus tard bleue, manifestée par les Vorticelles vertes traitées de la même manière, était due à la présence de la matière colorante verte.

Lorsque, avant d'ajouter l'acide sulfurique, les Vorticelliens incolores étaient imbibés d'une solution de sucre, la réaction de Raspail se produisait ultérieurement d'une manière très nette.

Parvenues à ce point, mes recherches furent interrompues, bien contre mon gré: je ne découvrais plus de Vorticelles vertes, et malheureusement rien non plus ne permet de prévoir le moment où j'en aurai de nouveau à ma disposition. Quoique, depuis lors, j'aie examiné attentivement et à différentes reprises des échantillons d'eau de plus de cinquante points des environs d'Utrecht, il ne m'est arrivé que deux fois (le 8 juin et le 3 juillet) d'en retrouver quelques-unes, et cela à une seule place, la même que la première fois. Au total, il ne m'est passé jusqu'ici sous les yeux qu'une centaine d'individus, et de ceux-ci un nombre assez notable ont même été perdus avant l'expérience, au cours de la préparation.

[1]) Incidemment, je reconnus que les innombrables globules fortement réfringents, qui remplissent le corps de cette espèce et le rendent en grande partie opaque, sont composés de carbonate de chaux. Lorsqu'un peu d'acide sulfurique concentré venait en contact avec un grand groupe d'individus, on voyait se former, aussitôt après que les granules avaient disparu en dégageant beaucoup de gaz, des groupes d'aiguilles de gypse.

Il n'est guère probable non plus que les Vorticelles vertes soient plus abondantes ailleurs. Car, ainsi que je l'ai déjà dit en commençant, les ouvrages que j'ai pu consulter n'en font aucune mention; quant à avoir été prises pour des formes contenant des *Zoochlorella*, une pareille confusion aurait été difficile, même de la part d'observateurs travaillant avec de faibles grossissements et une attention moyenne.

Quoi qu'il en soit, je pense que les faits ici communiqués suffisent pour enterrer définitivement l'hypothèse ressuscitée de la nature végétale spécifique de la chlorophylle. Même s'il était prouvé que la matière colorante de nos Vorticelles provient, en dernière analyse, d'une source végétale, cela ne changerait rien au fond. Car le seul point vraiment important, dans notre cas, c'est qu'il y a incontestablement des animaux capables, comme les plantes vertes, d'assimiler à la lumière au moyen d'une matière colorante *unie au plasma vivant de leur propre corps* et ne se distinguant pas de la chlorophylle.

Il n'est pas probable que notre Vorticelle verte soit le seul animal qui assimile au moyen de chlorophylle lui appartenant en propre. Il y bien des années déjà, je crois avoir vu des exemplaires à coloration verte diffuse de *Cothurnia crystallina*. On peut aussi se demander si, parmi les matières colorantes bleuâtres, brunâtres, violettes et autres existant à l'état diffus dans l'ectoplasme de beaucoup d'Infusoires, il n'y en a pas qui soient de vraies chromophylles, comparables à la xanthophylle (diatomine), cyanophylle, rhodophylie, etc. des Algues. Ici s'ouvre un vaste champ de recherches, notamment pour l'application de la méthode des bactéries.

Pour finir, encore une question: Ne serait-il pas possible aussi que, dans certains cas, des portions de plasma animal soient réellement différenciées en „corpuscules chromophylliens", en „pseudo-algues"? La prudence ne commanderait-elle pas provisoirement de ne pas regarder, sans autre preuve, comme un hôte d'origine végétale tout corpuscule coloré, semblable à une Algue et dégageant de l'oxygène à la lumière, qu'on trouve dans un animal?

SUR L'ACIDE RHIZOPOGONIQUE,

PAR

A. C. OUDEMANS Jr.

Dans un écrit publié il y a quelques années par M. F. A. Hartsen [1]) il est fait mention d'une matière cristalline que l'auteur avait extraite d'un champignon du midi de la France, le *Rhizopogon rubescens* Tulasne, et à laquelle il avait donné le nom de rhizopogonine.

Après le décès de M. F. A. Hartsen, son frère, Jhr. J. Hartsen, m'envoya une petite quantité d'une substance cristalline rouge, contenue dans un flacon bouché à l'émeri qui portait l'étiquette:

„Rhizopogonine (à purifier) extraite du fonge rhizopogon provençale''.

Selon toute probabilité, c'était là la matière que M. Hartsen avait retirée du *Rhizopogon rubescens*; le nom spécifique du champignon n'est pas le même, à la vérité, mais, pour l'une ou l'autre raison, M. Hartsen peut avoir modifié ce nom. Vu l'imperfection de nos connaissances relativement à la composition chimique des champignons, je résolus d'étudier, autant que le permettait sa petite quantité (un peu plus de 3 grammes), la préparation qui m'avait été confiée; j'étais encouragé dans ce dessein par les intéressantes recherches que M. C. Stahlschmid

---

[1]) *Neue chemische Untersuchungen* von Dr. F. A. Hartsen. Nordhausen, Fred. Forstemann's Verlag, 1875.

a exécutées, il y a peu d'années sur une matière analogue, *l'acide polyporique* [1]). Les résultats que je vais faire connaître au sujet de la substance découverte par M. Hartsen, si incomplets qu'ils soient, pourront peut-être servir, d'une part, à engager à de nouvelles études ceux qui seraient dans l'occasion de les entreprendre, d'autre part, à la caractériser d'une manière suffisamment certaine comme corps chimique.

Ce que M. Hartsen, dans l'écrit précité (p. 32), nous apprend concernant de rhizopogonine et le champignon qui l'a fournie, est assez succinct.

„Le *Rhizopogon rubescens* (gastromycetes)", lisons-nous, „est „un champignon qui se développe, lors des pluies d'automne, „dans les bois de *Pinus halepensis*, près de Cannes, Nice, etc. „Il ne sort qu'à demi de terre et est appelé, dans le pays, „truffe sauvage. J'y ai trouvé une matière nouvelle, qui mérite „une étude plus approfondie.

„*Préparation.* On divise les champignons, on les déshydrate „au moyen de l'alcool, on exprime, on fait macérer pendant 48 „heures dans l'éther et on exprime de nouveau. On distille alors „l'éther jusqu'à résidu alcoolique, et on laisse refroidir. On obtient ainsi des aiguilles cristallines d'une matière qui, à l'air, „prend bientôt une couleur rouge cinabre. La substance grasse „qui la souille est enlevée à l'aide de papier à filtre et par „une nouvelle cristallisation dans de l'alcool qu'on abandonne à „l'évaporation spontanée".

„Il est à présumer que cette matière se rencontre aussi dans „d'autres espèces du genre Rhizopogon".

Bien que la substance qui m'avait été remise présentât toutes les apparences de la pureté, je ne jugeai pas inutile de la faire cristalliser encore une couple de fois dans l'alcool. Pendant le refroidissement de la solution saturée à chaud, il se

[1]) *Ann. dcr Chem. u. Pharm.*, t. 187, p. 177 et suiv.

déposa de longues et superbes aiguilles, d'un rouge de sang tant qu'elles restaient humides sur le filtre, mais prenant par la dessiccation une teinte plus orangée, qui rappelait un peu celle de l'alizarine sublimée, sans toutefois avoir le même éclat.

Dans l'eau, la matière est complètement insoluble. La moindre quantité d'un de ses sels, dissoute dans l'eau et additionnée d'un acide, donne, de même que l'acide polyporique de Stahlschmidt, un précipité qui, à cause de son extrême division, apparaît sous la forme d'un trouble blanc.

L'éther, le chloroforme, le sulfure de carbone et la ligroïne la dissolvent facilement; dans l'alcool froid la matière ne se dissout qu'en faible proportion, dans l'alcool bouillant, au contraire, en quantité assez considérable.

5,3094 grammes d'une solution d'acide rhizopogonique dans l'alcool à 90 pour cent en poids, saturée à 16° C, laissèrent, après évaporation, 0,1058 gr. de résidu. Il en résulte, pour la solubilité, 2,03 parties d'acide sur 100 parties d'alcool.

Dans les alcalis, la matière se dissout en produisant une coloration violet foncé, qui ressemble beaucoup à celle d'une solution alcaline d'alizarine. Les carbonates alcalins, bouillis avec la matière, se colorent immédiatement en violet, et au dégagement de CO_2 il est facile de reconnaître que le corps possède le caractère d'un acide, raison pour laquelle il me paraît convenable de lui donner le nom d'acide rhizopogonique, plutôt que celui de rhizopogonine.

L'acide rhizopogonique, cristallisé de l'alcool suffisamment concentré, ne contient pas d'eau de cristallisation et n'est composé que de carbone, d'hydrogène et d'oxygène. Il fond à 127° C en un liquide rouge brunâtre, qui par le refroidissement se prend en une masse amorphe, résineuse, montrant çà et là des traces de cristallisation. A une température élevée (au dessus de 300° C) il se décompose, en émettant des vapeurs faiblement odorantes, un peu acides, et en laissant une quantité proportionnellement grande d'un charbon difficilement combustible.

Les analyses de l'acide ont fourni les résultats suivants:

1) 0,2156 gr. de la matière ont donné	0,6040 gr. CO_2	et	0,1621 gr. H_2O
2) 0,2170 „ „ „ „ „ „	0.6080 „	„ „	0,1668 „ „
3) 0.1974 „ „ „ „ „ „	0,5482 „	„ „	0,1510 „ „

On déduit de là, pour la proportion en centièmes du carbone et de l'hydrogène,

	1.	2.	3.
C . . .	76,4	76.4	75,7
H . . .	8,4	8,5	8,5

Ces chiffres peuvent correspondre à un grand nombre de formules, ainsi qu'il résulte des exemples suivants:

	$n(C_{14}H_{18}O_2)$	$n(C_{20}H_{26}O_3)$
C . . .	77,0	76,4
H . . .	8,3	8,3

dont le dernier s'accorde le mieux avec les nombres trouvés.

Sels de l'acide rhizopogonique.

L'acide rhizopogonique a un caractère acide très faible; il décompose à la vérité les carbonates alcalins, mais les combinaisons qui prennent naissance ne sont pas très stables et se détruisent par l'ébullition avec beaucoup d'eau ou d'alcool faible, en laissant déposer de l'acide rhizopogonique. L'ammoniaque le dissout également, mais le sel formé perd de l'ammoniaque lorsqu'il est exposé à l'air, et finalement il ne reste plus que de l'acide libre. J'ai réussi à obtenir une combinaison potassique et sodique définie en dissolvant l'acide dans un excès de carbonate alcalin, additionné d'un peu d'alcool, et en évaporant doucement cette solution, au bain-marie. A un certain degré de concentration il commence à se former, à la surface du liquide, des cristaux microscopiques des sels alcalins, qui sont insolubles dans un excès d'une solution concentrée de carbonate alcalin. Laisse-t-on alors refroidir le liquide, il se dépose une masse noir-violâtre indistinctement cristalline, qu'on reconnaît,

au microscope, être formée d'un amas de petits cristaux penniformes. On porte cette bouillie cristalline sur un filtre, où on la lave à l'eau. Le liquide qui s'écoule a d'abord une couleur assez foncée, mais, à mesure que la solution du carbonate alcalin est remplacée par de l'eau, la teinte du liquide qui traverse le filtre s'éclaircit et finalement, lorsque ce liquide n'agit plus sur le papier de tournesol rougi, il est à peu près incolore. Le sel obtenu, qui ne perdait pas d'eau par la dessiccation à 120° C, contenait, suivant une analyse, 7,6 pour cent K. La formule $C_{28}H_{35}KO_4$, qui, eu égard aux résultats de l'analyse de l'acide libre, n'est pas improbable, exige 8,2 pour cent K. Peut-être un peu d'alcali avait-il été entraîné par l'eau ayant servi au lavage du sel.

Il est singulier que, outre ce composé, j'aie obtenu, quand la séparation s'effectuait au sein de dissolutions renfermant de l'alcali libre, d'autres sels qui, sur 1 molecule d'acide, contenaient 9,9, 23,5, 35,7 et même 37,0 pour cent de potassium.

Ces rapports ont été déduits de dosages de l'acide rhizopogonique, insoluble dans l'eau, et du potassium à l'état de K Cl. Quelques-uns de ces sels contenaient de l'eau de cristallisation; celui où la proportion de K était de 9,9°/₀ renfermait jusqu'à 43,5°/₀ H_2O.

La variabilité de ces résultats montre l'instabilité des sels dont il s'agit, en même temps qu'elle prouve la difficulté d'arriver, par l'analyse de ces sels, à la connaissance du vrai poids moléculaire de l'acide rhizopogonique.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

CONTRIBUTION À LA CONNAISSANCE DE L'ACIDE QUINOVIQUE, DE LA QUINOVINE ET DE LA QUINOVITE,

PAR

A. C. OUDEMANS, Jr.

La publication récente d'un travail de MM. C. Liebermann et F. Giesel [1]) m'engage à faire connaître les résultats que j'ai obtenus, il y a quelques années, de recherches faites sur la quinovine, matière étudiée surtout par M. Hlasiwetz, et sur les produits de dédoublement qui en dérivent; si ces résultats confirment en grande partie ceux auxquels sont arrivés les deux chimistes allemands, sous quelques rapports pourtant il y a, entre les uns et les autres, des différences notables.

[1]) *Ueber Chinovin und Chinovasäurc*, dans *Ber. d. deutsch chem. Gesellsch.*, t. XVI, p. 926 et suiv.

Quinovine.

Le produit dont j'ai fait usage m'avait été envoyé, grâce à l'obligeante entremise de M. le Dr. J. E. de Vrij, par M. le Dr. Kerner, de Sachsenhausen; sa masse s'élevait à un peu plus de ½ kilogramme. C'était une poudre *blanche*, par conséquent déjà débarrassée du rouge cinchonique qui accompagne le produit brut et dont la présence est assez gênante. Pour obtenir la quinovine aussi pure que possible, je traitai la matière par l'alcool à 90°/₀ en poids; la solution concentrée fut filtrée, puis on y ajouta assez d'eau pour précipiter environ les $^5/_6$ de la quinovine dissoute. Le liquide fut alors filtré de nouveau et étendu d'eau distillée. La préparation ainsi obtenue fut purifiée encore une couple de fois, par dissolution dans l'alcool concentré et précipitation par l'eau; elle constituait une poudre blanche amorphe, passablement hygroscopique, de sorte que, lors de l'analyse, des précautions particulières [1]) furent observées pour prévenir que la matière n'attirât de l'humidité pendant qu'on l'introduisait dans le tube à combustion.

Les analyses de la matière séchée à 110° C fournirent les résultats suivants:

1)	0,2552	gr.	donnèrent	0,6178	gr.	CO_2	et	0,2070	gr. H^2O
2)	0,1979	„	„	0,4776	„	„	„	0,1586	„ „
3)	0,2962	„	„	0,7144	„	„	„		
4)	0,2069	„	„	0,5037	„	„	„	0,1644	„ „
5)	0,2414	„	„	0,5837	„	„	„	0,1884	„ „
6)	0,2799	„	„	0,6736	„	„	„	0,2124	„ „

On déduit de là pour le carbone et l'hydrogène, en centièmes:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
C	66,0	65,8	65,8	66,4	65,9	65,7
H	9,0	8,8	—	8,8	8,7	8,5

[1]) La nacelle de platine contenant la matière était introduite encore chaude dans un petit tube de verre, qui pouvait être fermé hermétiquement par des plaques de verre, à l'aide d'une vis. Après refroidissement, le tout était pesé, puis la nacelle était glissée aussi rapidement que possible dans le tube à combustion.

Lorsque la matière était séchée pendant longtemps à 130° C, l'analyse accusait, comme l'avait déjà observé M. Hlasiwetz [1]), une proportion plus forte de carbone; c'est ce que montrent les chiffres suivants:

1) 0,2045 gr. donnèrent 0,5032 gr. CO^2 et 0,1662 gr. H^2O
2) 0,2532 „ „ 0,6221 „ „ „ 0.1994 „ „ ,

d'où l'on déduit, en centièmes,

	1.	2.
C	67,1	67,0
H	9,0	9,1.

Je suis d'avis que les chiffres obtenus en premier lieu se rapprochent le plus de la vérité et qu'il faut éviter l'exposition prolongée de la quinovine à une température de 130° C.

On voit qu'au total mes résultats s'accordent assez bien avec ceux de MM. Liebermann et Giesel; la proportion de carbone trouvée par moi est généralement un peu plus élevée et il y a entre mes divers nombres des écarts plus faibles.

Au sujet de la préparation employée, je me permettrai de faire encore les remarques suivantes. La solution alcoolique se dessécha toujours par l'évaporation en une masse gommeuse et, abandonnée à elle-même, ne déposa jamais de cristaux; j'en conclus, d'accord avec MM. Liebermann et Giesel, que j'ai toujours eu en mains l'α-quinovine. Cette conclusion est confirmée par le pouvoir rotatoire spécifique de la matière, pour lequel j'ai trouvé, avec le polaristrobomètre, les résultats suivants:

1). 0,8001 gr. de quinovine séchée à 110°, dissous dans 19^{cc} d'alcool absolu, donnèrent, à 16° C, dans un tube long de 302,8 mm., une rotation à droite de 7°35′. On en déduit par le calcul: $(\alpha)_D = 58°,9$.

2). Le liquide de l'expérience précédente, porté par l'addition d'alcool absolu à un volume double, puis examiné à la même température et dans le même tube, donna une rotation à droite de 3°48′,5. Il en résulte pour $(\alpha)_D$: + 59°,2.

[1]) *Ann. der Chem. u. Pharm.*, t. LXXIX, p. 129—155.

MM. Liebermann et Giesel ont trouvé 56°,6, mais ils n'indiquent pas à quel degré de concentration la matière avait été prise. M. de Vrij [1]) a obtenu pour $(\alpha)_j$ la valeur + 52°,4 (2,675 gr. de quinovine sur 26 cc d'alcool), ce qui ne s'éloigne pas notablement de mes déterminations; les valeurs du p. r. s. pour les deux raies jaunes j (jaune moyen) et pour D sont à peu près entre elles comme 23 à 30, et, en augmentant le chiffre 52°,4 dans ce rapport, on obtient + 60° pour $(\alpha)_D$

Mes observations concernant les propriétés de l'α-quinovine cadrent du reste très bien avec celles de MM. Liebermann et Giesel.

Acide quinovique.

L'α-quinovine se dédouble, sous l'influence des acides, en acide quinovique et en une espèce de sucre que j'appellerai, pour abréger, quinovite. Cette décomposition s'opère facilement en chauffant avec l'acide la solution alcoolique de la matière; même l'acide acétique agit avec assez de force pour l'effectuer.

Rochleder prétend que la quinovine est aussi dédoublée en acide quinovique et en quinovite par l'action de l'amalgame de sodium. J'ai à plusieurs reprises tenté cette expérience, mais toujours sans succès; je crois donc pouvoir admettre que l'assertion de Rochleder repose sur une erreur; probablement il s'est servi de quinovine qui contenait déjà, dès l'origine, beaucoup d'acide quinovique.

La méthode recommandée par M. Hlasiwetz, et qui consiste à faire passer de l'acide chlorhydrique gazeux dans une solution alcoolique de quinovine, conduit il est vrai à une séparation assez rapide de l'acide quinovique, mais ne convient du reste que médiocrement lorsqu'il s'agit de recueillir en même temps le second produit du dédoublement, le sucre. Le liquide, en effet, se charge fortement d'acide chlorhydrique, prend une couleur

[1]) *De kinakultuur op Java op het einde van het jaar* 1859, Batavia, H. M. van Dorp, 1860.

très foncée et est difficile à décolorer. J'ai donc choisi une autre voie pour la préparation des deux produits de dédoublement. La solution alcoolique de quinovine fut chauffée pendant quelques heures à 100°, dans un matras scellé à la lampe, avec une quantité relativement petite d'acide chlorhydrique concentré. L'acide quinovique blanc, ainsi formé, fut lavé à l'alcool faible, puis dissous dans l'ammoniaque concentrée; après que cette solution alcaline eut été mélangée avec beaucoup d'alcool concentré, le liquide fut porté à l'ébullition et brusquement additionné d'une quantité d'acide chlorhydrique un peu plus que suffisante pour saturer complètement l'ammoniaque. De cette manière j'obtins une poudre cristalline, facile à purifier par des lavages à l'alcool concentré.

En analysant cette matière, je fus frappé, tout comme MM. Liebermann et Giesel, de trouver pour la proportion de carbone environ 1 pour cent de moins que ne l'ont indiqué MM. Hlasiwetz [1]), Rochleder [2]) et Rembold [3]) (dans ses recherches sur les principes de la racine de tormentille). Cette circonstance, on le comprend, me fit d'abord douter de l'exactitude de mes déterminations, et, après avoir modifié autant que possible les méthodes de purification, je recommençai les analyses. Mais toujours j'arrivai au même résultat, de sorte que je suis maintenant convaincu que, pour une raison quelconque (peut-être pour avoir employé dans l'analyse des bouchons ordinaires), les savants allemands ci-dessus nommés ont obtenu un chiffre trop élevé pour le carbone.

Voici les résultats de celles de mes analyses qui m'inspirent le plus de confiance (la matière était séchée à 110° C):

Acide quinovique.

1)	0,2008 gr.	donnèrent	0,5337 gr.	CO_2	et	0,1730	gr.	H_2O
2)	0,2218 „	„	0,5920 „	„	„	0,1870	„	„
3)	0,2219 „	„	0,5902 „	„	„	0,1886	„	„

[1]) *Ann der Chem. u. Pharm.*, t. CXI, p. 182 et suiv.
[2]) *Journ. f. pract. Chem.*, t. CII, p. 17 et suiv.
[3]) *Ann. der Chem. u. Pharm.*, t. CXLV, p. 5 et suiv.

4)	0,2129	gr. donnèrent	0,5710	gr. CO_2	et	0,1822	gr.	H_2O
5)	0,1682	„	„	0,4474	„	„	„ 0,1460	„	„
6)	0,1998	„	„	0,5374	„	„	„ 0,1700	„	„
7)	0,2054	„	„	0,5462	„	„	„ 0,1737	„	„
8)	0,2041	„	„	0,5485	„	„	„ 0,1760	„	„
9)	0,2233	„	„	0,5935	„	„	„ 0,1867	„	„
10)	0,2026	„	„	0,5418	„	„	„ 0,1734	„	„
11)	0,2262	„	„	0,6022	„	„	„ 0,1880	„	„

La préparation employée dans les analyses 9, 10 et 11 avait été obtenue en dissolvant de l'acide quinovique, ayant les apparences de la pureté, dans l'alcool absolu, à la température de l'ébullition, et en séparant ensuite la plus grande partie de l'alcool par la distillation, suivant le précepte donné par M. Hlasiwetz pour la purification de la matière.

Au moyen des chiffres ci-dessus, on calcule pour la proportion du carbone et de l'hydrogène, en centièmes:

	1.	2.	3.	4,	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
C	72,5	72,8	72,6	73,1	72,5	72,9	72,5	72,8	72,5	72,9	72,6
H	9,6	9,4	9,4	9,5	9,6	9,4	9,4	9,6	9,3	9,5	9,3

M. Hlasiwetz attribue à l'acide quinovique la formule, modifiée conformément aux nouveaux poids atomiques, $C_{24}H_{38}O_4$. Les chiffres obtenus par moi s'accordent toutefois mieux avec la formule $C_{22}H_{34}O_4$, qui demande 72,9°/₀ de carbone et 9,4°/₀ d'hydrogène. Comme la différence entre les deux formules est précisément de C_2H_4, j'avais soupçonné que M. Hlasiwetz avait analysé l'éther éthylique de l'acide quinovique, au lieu de l'acide lui-même: cette supposition me semblait d'autant plus acceptable que M. Hlasiwetz avait obtenu sa préparation en faisant traverser par du gaz chlorhydrique une dissolution de quinovine dans l'alcool concentré en en soumettant le produit à une nouvelle cristallisation dans l'alcool. La première de ces opérations donne lieu à un dégagement considérable de chaleur, et cette chaleur aurait pu agir favorablement sur la formation de l'éther quinovique. Pour m'assurer si ma présomption était fondée ou non, je fis passer du gaz chlorhydrique dans une solution al-

coolique concentrée d'acide quinoviquə pur; le liquide s'échauffa fortement et il se déposa peu à peu une poudre cristalline, mais celle-ci, comme le montra l'analyse, ne consistait qu'en acide quinovique, lequel est plus soluble dans l'alcool que dans ce même liquide chargé d'acide chlorhydrique.

Ce résultat est donc entièrement conforme à ce qui a été trouvé par MM. Liebermann et Giesel concernant l'impossibilité d'obtenir, par la voie indiquée, un éther composé.

Si l'on compare l'ensemble de mes chiffres avec ceux de MM. Liebermann et Giesel, on reconnaît que j'ai obtenu, en moyenne, une proportion de C et de H un peu plus forte que ces deux chimistes, savoir:

	Liebermann et Giesel.	Oudemans.
C	72,5	72,7
H	9,4	9,5.

Je dois faire remarquer d'ailleurs qne la méthode d'analyse, suivie par moi, donne généralement pour la teneur en hydrogène un chiffre très *exact*, mais, en tout cas, plutôt un peu trop bas que trop élevé [1]). D'après les résultats qu'ils ont obtenus au sujet de la quantité d'acide quinovique fourni par un poids déterminé de quinovine, MM. Liebermann et Giesel adoptent une formule environ une fois et demie plus forte que celle de M. Hlasiwetz. Ils hésitent toutefois entre les expressions $C_{32}H_{48}O_6$ et $C_{33}H_{48}O_6$, qui exigent pour C et H, en centièmes:

$C_{32}H_{48}O_6$	$C_{33}H_{48}O_6$
72,73	73,33
9,09	8,89

Je crois pouvoir admettre que ces formules attribuent toutes les deux un nombre d'atomes trop faible à l'hydrogène, et, eu égard aussi aux produits de décomposition dont il sera parlé

[1]) Le tube à combustion, placé sur le fourneau de Glaser, est déjà porté au rouge dans la moitié qu'occupe l'oxyde de cuivre, et déjà relié aux tubes pour l'absorption de H_2O et de CO_2, au moment oú l'on glisse dans sa partie postérieure vide la nacelle de platine contenant la substance à analyser.

plus loin, la composition de l'acide me paraît être représentée plus exactement par la formule $C_{33}H_{52}O_6$. Elle correspond, pour C et H, aux proportions centésimales suivantes:

C	72,8
H	9,6.

En ce qui touche les propriétés de l'acide quinovique, mes résultats sont en parfait accord avec ceux qu'ont fait connaître MM. Liebermann et Giesel.

Pour le p. r. s. de l'acide quinovique en solution alcaline, au sujet duquel le travail de MM. Liebermann et Giesel ne renferme aucune indication, j'ai obtenu, avec le polaristrobomètre, les chiffres suivants:

1) 0,5988 gr. d'acide, dissous dans 4 cc de solution potassique normale, et étendus d'eau jusqu'à occuper un volume de 22 cc, ont donné, dans un tube long de 302,8 mm. et à 16° C, une rotation à droite de 7°10′. On déduit de là, par le calcul, $(\alpha)_D = + 86°,9$;

2) Le même liquide, amené par l'addition d'eau au double de son volume, a imprimé, dans les mêmes conditions, une rotation à droite de 3°37′. Le calcul en déduit: $(\alpha)_D = + 87°,8$.

Quinovite.

Pour préparer la quinovite, je saturais par le carbonate barytique pur la solution, chargée d'acide chlorhydrique, résultant de la décomposition de la quinovine; la liqueur était ensuite évaporée à siccité, au bain-marie, et le résidu épuisé par un mélange d'alcool absolu et d'éther. Parfois, au lieu de carbonate de baryte, on employa du carbonate de soude; je pense toutefois que le premier de ces sels mérite la préférence. Au bout de quelque temps, la solution, colorée en brunâtre, était séparée du chlorure de baryum par le filtre, évaporée au bain-marie, puis additionnée d'une grande quantité d'eau et bouillie. La liqueur, débarrassée par une nouvelle filtration d'un peu de

quinovine et d'acide quinovique qui s'étaient déposés, était alors décolorée autant que possible par le charbon animal, et finalement, après évaporation jnsqu'à consistance d'extrait, traitée par l'éther absolu, au moins lorsqu'il s'agissait d'obtenir une matière pure, pour les besoins de l'analyse; quand une faible proportion de cendres ne nuisait pas, l'éther, dans lequel la quinovite se dissout lentement et difficilement, était remplacé par l'alcool absolu [1]). De la solution dans l'éther pur je retirais parfois, de même que MM. Liebermann et Giesel, un produit complètement incolore, dont la combustion ne donnait pas trace de cendres.

Voici les résultats des analyses que j'ai exécutées, en observant toutes les précautions nécessaires (voir p. 306) pour empêcher l'absorption de vapeur d'eau, sur la quinovite purifiée autant que possible:

1) 0,3196 gr. de quinovite, séchée pendant 5 heures à 105° C, ont donné 0,5734 gr. CO_2 et 0,2495 gr. H_2O.

2) 0,2708 gr. de quinovite, séchée pendant 5 heures à 105° C, ont donné 0,4836 gr. CO_2 et 0,2056 gr. H_2O.

En calculant d'après cela la proportion de C et de H en centièmes, on trouve:

	1.	2.
C	48,9	48,7
H	8,7	8,4

Ces chiffres montrent déjà que le produit n'est nullement identique à la mannitane, comme M. Berthelot [2]) l'avait admis sans preuves directes. Au début de mes expériences sur ce sujet, alors que j'étais dans l'idée que la quinovite possédait la

[1]) Contrairement au résultat des expériences de MM. Lieberman et Giesel, je n'ai pu obtenir, en traitant la préparation brute par l'alcool absolu, ou même par un mélange d'alcool absolu et d'éther, de la quinovite ne laissant aucune trace de cendres.

[2]) *Traité de Chimie organique fondée sur la synthèse* (Paris, Mallet-Bachelier, 1860), t. II, p. 198.

composition $C_6H_{12}O_5$, j'en avais laissé une partie en contact avec un peu d'eau; au bout de quatre années, il m'a été impossible d'en retirer de la mannite.

Mes résultats s'accordent très bien avec ceux de MM. Liebermann et Giesel; j'ai seulement trouvé la proportion d'hydrogène tant soit peu plus élevée. Provisoirement je crois donc devoir adopter la formule $C_6H_{12}O_4$, qui, eu égard à la proportion d'hydrogène et à l'équation de dédoublement la plus acceptable, me paraît offrir plus de probabilité que la seconde formule proposée par MM. Liebermann et Giesel, savoir $C_{12}H_{22}O_8$; la première formule cadre d'ailleurs très bien avec les chiffres que j'ai obtenus, comme le montre la comparaison suivante:

		Oudemans.		Liebermann et Giesel.	
	calculé.	1)	2)	1)	2)
C_6	48,7	48,9	48,7	49,0	48,9
H_{12}	8,1	8,7	8,4	8,1	8,2
O_4	43,2				
	100,0				

Suivant la juste remarque de MM. Liebermann et Giesel, ces résultats ne donnent pas encore le droit de conclure que la quinovine représente l'éther composé de la quinovite elle-même, puisque, lors du dédoublement par l'acide chlorhydrique, l'alcool attendu (analogue aux éthers de la mannite) peut s'être converti en anhydride.

Quoique je ne me fasse par une idée nette d'une espèce de sucre ayant la formule indiquée par MM. Liebermann et Giesel et par moi, je crois devoir remarquer qu'il est facile de trouver une expression représentant une pareille combinaison et indiquant, de plus, que la matière est au moins en relation avec des alcools sexvalents, tels que la mannite, et avec les espèces connues de sucres. A titre d'exemple, et bien entendu sans y attacher quelque autre valeur, je donnerai les formules suivantes:

$$
\begin{array}{llllc}
CH_2.OH & COH & CH_2.OH & CH_2.OH & \\
| & | & | & | & \\
CH_2 & CH_2 & CO & CH_2 & \\
| & | & | & | & \\
CH.OH & CH_2 & CH_2 & CH_2 & \text{etc.} \\
| & | & | & | & \\
CH.OH & CH.OH & CH_2 & CO & \\
| & | & | & | & \\
CH & CH.OH & CH.OH & CH.OH & \\
| >O & | & | & | & \\
OH_2 & CH_2.OH & CH_2.OH & CH_2.OH &
\end{array}
$$

A ma grande surprise, mes observations concernant le p. r. s. du sucre ont donné un résultat tout autre que celles de MM. Liebermann et Giesel.

Pour être sûr du poids de la matière, je séchai une petite quantité de quinovite très pure pendant 5 heures, dans un petit flacon à l'émeri, à la température de 105° C. Aussitôt retiré du bain d'air, le flacon fut bouché et introduit sous une cloche à dessiccation. Après refroidissement complet, le contenu fut dissous dans l'alcool absolu et le tout amené au volume de 19 c c.

0,3604 gr. de quinovite ont donné ainsi, à 18° C, dans un tube de 302,8 mm., une rotation à droite de 3°29′, d'où l'on déduit par le calcul: $(\alpha)_D = + 60°,5$. MM. Liebermann et Giesel ont trouvé un p. r. s. encore *plus* élevé que celui du sucre extrait de la β-quinovine (+ 78°,1).

De même que MM. Liebermann et Giesel, j'ai constaté que la quinovite est très facilement oxydée par l'acide nitrique et que dans cette réaction il se forme beaucoup d'acide oxalique.

Décomposition de l'acide quinovique par l'acide sulfurique concentré.

Il y a très longtemps déjà, mon frère [1]) a observé que, sous l'influence de l'acide sulfurique concentré, les écorces de quin-

[1]) C. A. J. A. Oudemans, *Aanteekeningen op het systematisch-pharmacognostisch-botanische gedeelte der Pharmacopaea Neerlandica*, p. 223 (Rotterdam, O. Petri, 1854-56).

quina montrent, dans certaines cellules, une coloration rouge. D'abord incertain de la cause de ce phénomène et porté à l'attribuer à la présence d'un alcaloïde particulier dans les cellules libériennes des quinquinas étudiés, il inclina plus tard à l'opinion [1]) que cette coloration est occasionnée par la décomposition de l'acide quinotannique, donnant lieu à la formation de rouge cinchonique. En 1859, toutefois, M. J. E. de Vrij [2]) avait fait voir que la coloration est le résultat d'une décomposition spéciale de *l'acide quinovique*, sous l'influence de l'acide sulfurique.

Il est singulier que cette décomposition ait entièrement échappé à l'attention de M. Hlasiwetz. Ce chimiste dit en effet, dans le Mémoire ci-dessus cité, que l'acide quinovique est dissous par l'acide sulfurique, mais que l'eau le précipite de cette solution. Comme il n'ajoute rien d'autre, je crois pouvoir admettre que, dans l'opinion de M. Hlasiwetz, l'acide quinovique n'éprouvait aucun changement par l'action de l'acide sulfurique. Les choses, toutefois, se passent tout autrement, et il paraît que, suivant la quantité d'acide sulfurique ajouté et suivant d'autres circonstances encore imparfaitement connues, l'acide quinovique peut donner naissance à des produits complètement différents.

MM. Liebermann et Giesel ont déjà décrit les phénomènes qui s'observent dans la réaction de l'acide sulfurique sur l'acide quinovique. A cette description j'ai seulement à ajouter ceci. Lorsque, après le dégagement d'oxyde de carbone, la masse est abandonnée dans des capsules plates, on voit, aux points où l'air a accès, se produire insensiblement (peut-être par suite de l'absorption de vapeur d'eau ou d'ammoniaque) une faible coloration en rouge vineux. Le même phénomène peut quelquefois s'observer à la suite de l'addition graduelle de *petites* quan-

---

[1]) *Handleiding tot de pharmacognosie van het planten- en dierenrijk*, 2de éd., p. 72 (Amsterdam, C. L. Brinkman, 1880).

[2]) *De kinakultuur op Java op het eind van het jaar* 1852 (Batavia H. M. van Dorp, 1860).

[3]) *Ber. der deutsche Chem. Gesellschaft*, t. XVI, p. 937.

tités d'eau, mais si l'on continue à ajouter de ce liquide, la couleur rouge disparaît très vite et il ne reste plus qu'une matière d'apparence amorphe, colorée en gris terne.

En entreprenant l'étude de l'action de l'acide sulfurique sur l'acide quinovique, j'avais eu surtout pour but d'isoler le principe colorant et d'en rechercher les propriétés. En cela, toutefois, je n'ai réussi qu'à moitié, ayant seulement pu séparer une très petite quantité de cette matière, nommée quinochromine par MM. Liebermann et Giesel, et y reconnaître la cause des phénomènes de coloration en question. Quant à un examen ultérieur, la minime quantité dont je disposais ne me l'a pas permis.

Mais revenons à notre objet. Relativement à l'origine de l'oxyde de carbone que l'acide quinovique dégage sous l'influence de l'acide sulfurique, je remarquerai, en premier lieu, que ce gaz provient de l'acide formique qui a commencé par se former et qui ensuite est décomposé par l'acide sulfurique. Si l'on prend de l'acide sulfurique tout juste assez concentré pour qu' à la température ordinaire de l'air il puisse encore agir sur l'acide quinovique, et si, en conséquence, le dégagement d'oxyde de carbone ne se fait que lentement, on se convainc aisément, par l'odeur et par la réaction sur le papier de tournesol, qu'il s'échappe un acide gras volatil; le caractère très spécial de l'odeur dégagée et la réaction que les vapeurs, reçues dans l'eau, présentent vis-à-vis de la solution ammoniacale d'argent, rendent extrêmement probable que cet acide gras est de l'acide formique.

J'ai tâché de déterminer la quantité de l'oxyde de carbone formé dans la décomposition, et j'ai ainsi obtenu des chiffres qui diffèrent peu de ceux que mentionnent MM. Liebermann et Giesel. Ces chimistes ont obtenu, de 10 grammes d'acide quinovique, environ 210 cc d'oxyde de carbone, c'est-à-dire, environ 2,4 pour cent en poids. Mes expériences ont donné les résultats suivants:

1) 1,618 gr. d'acide quinovique pur et sec furent introduits dans un petit matras, au col duquel était adapté un bouchon

de caoutchouc à 3 ouvertures; par celle du milieu on pouvait verser, à l'aide d'un petit entonnoir à robinet, de l'acide sulfurique pur; des deux ouvertures latérales, pourvues chacune d'un tube de verre, l'une servait à amener de l'air au moyen d'un aspirateur, l'autre à livrer passage à l'oxyde de carbone et aux vapeurs d'acide formique; ces produits passaient alors sur de l'oxyde de cuivre chauffé au rouge, qui les transformait en acide carbonique, pouvant être dosé de la manière ordinaire.

J'obtins ainsi:

0,0698 gr. CO_2 = 0,0729 gr. CH_2O_2 = 0,0527 gr. CO (2,7°/₀).

2) 6,342 gr. d'acide quinovique, traités de la même manière, donnèrent:

0,2914 gr. CO_2 = 0,3046 gr. CH_2O_2 = 0,1854 gr. CO (2,9°/₀).

Si l'on adopte pour l'acide quinovique la formule qui a été proposée ci-dessus par moi, ou bien celle qui l'a été par MM. Liebermann et Giesel, à la formation de 1 molécule d'acide formique devrait correspondre un dégagement de 5,2°/₀ d'oxyde de carbone.

De la différence entre ce chiffre et celui qui a été réellement obtenu, on serait autorisé à tirer l'une des conclusions suivantes:

1) Le poids moléculaire de l'acide quinovique est le double de celui que nous avons admis ci-dessus, et la molécule $C_{66}H_{104}O_{12}$ perd, sous l'action de l'acide sulfurique, 1 molécule d'acide formique.

2) Deux molécules de l'acide qninovique $C_{33}H_{52}O_6$ perdent une seule molécule d'acide formique.

3) L'acide formique d'abord formé, ou l'oxyde de carbone résultant de sa décomposition, est partiellement employé, sous l'influence de l'acide sulfurique, à la formation secondaire de l'une ou l'autre combinaison chimique. Dans cette hypothèse, on peut conserver $C_{33}H_{52}O_6$ pour la formule de l'acide quinovique.

Des trois hypothèses en question, la seconde me semble tout à fait inadmissible, la troisième me paraît être la plus probable.

Considérons maintenant les produits solides qui j'ai obtenus par l'action de l'acide sulfurique.

MM. Liebermann et Giesel disent qu'il convient de régler l'action de l'acide sulfurique de telle sorte que la décomposition de l'acide quinovique marche lentement. A cet égard, l'expérience m'a conduit à la même remarque. Mais, même en observant cette précaution et en faisant usage d'acide sulfurique *pur* (encore un peu dilué si c'est possible), j'ai toujours trouvé qu'après la réaction des deux corps l'odeur de l'acide sulfureux devient perceptible, en même temps qu'une autre odeur, qui rappelle celle des acides gras et doit provenir de quelque combinaisson organique. Dans une expérience unique, où j'essayais d'oxyder l'acide quinovique par un mélange de bichromate de potasse et d'acide sulfurique, et où ce composé se montra très stable, je crois avoir perçu distinctement l'odeur de l'acide butyrique; comme l'oxydation, toutefois, n'avait en plusieurs jours fait que très peu de progrès, cette expérience fut interrompue, et plus tard je n'ai pas eu l'occasion d'y revenir.

Quinochromine.

Partant de la supposition que le produit obtenu par l'action de l'acide sulfurique sur l'acide quinovique pouvait être un mélange de différentes combinaisons, j'ai essayé d'opérer une séparation approximative en dissolvant toute la masse dans l'alcool (disolution qui, contrairement à celle de l'acide quinovique, se fait avec la plus grande facilité) et en ajoutant au liquide autant d'eau qu'il pouvait en supporter sans se troubler d'une manière persistante.

Ce liquide fut alors abandonné à lui-même dans un matras bouché. Peu à peu il se déposa une faible quantité d'une matière

cristallisant en aiguilles, que je crois devoir regarder comme identique à la quinochromine de Liebermann et Giesel, parce que 1° elle a environ la même composition, et que 2° elle donne les mêmes réactions de couleur qui ont été décrites par ces expérimentateurs. Elle était toutefois si peu abondante que, d'environ 30 grammes d'acide quinovique, j'ai pu à peine en recueillir assez pour l'exécution d'une analyse et la constatation des principaux caractères.

L'analyse conduisit au résultat suivant:

0,1962 gr. de la matière donnèrent 0,5762 gr. CO_2 et 0,1717 gr. H_2O. On déduit de là, par le calcul, 80,1°/₀ C et 9,7°/₀ H.

La matière avait toutefois fourni un peu de cendre, dont une partie était restée dans la nacelle de platine, tandis qu'une autre partie s'était dissipée dans le tube à combustion.

Je ne dois pas oublier de mentionner que, en oxydant l'acide quinovique par un mélange de bichromate de potasse et d'acide sulfurique, j'ai une fois obtenu un produit cristallin difficilement soluble dans l'alcool, qui m'a paru être identique au corps précédent et dont l'analyse amena les chiffres suivants:

0,2496 gr. donnèrent 0,6746 gr. CO_2 et 0,2173 gr. H_2O, d'où, par le calcul: 81,1°/₀ C et 9,7°/₀ H.

Malheureusement, de cette préparation aussi je ne possédais qu'une très minime quantité, de sorte que je dus renoncer à en poursuivre l'étude.

Quinovène.

Une seule fois j'ai obtenu, par l'action d'un excès d'acide sulfurique sur l'acide quinovique, une faible quantité d'une substance que je pris d'abord pour la quinochromine, mais qui, examinée de plus près, se trouva en différer et ne pas être apte

aux réactions de couleur que MM. Liebermann et Giesel ont décrites en détail. Voici le résultat de l'analyse de ce corps:

0,1644 gr. donnèrent 0,5394 gr. CO_2 et 0,1354 gr. H_2O.

On tire de là par le calcul: 89,5°/₀ C et 9,8°/₀ H, ce qui montre que le corps était un carbure d'hydrogène. Aux chiffres trouvés peuvent s'adapter des formules très diverses, ainsi qu'il ressort du tableau suivant:

	$C_{33}H_{42}$	$C_{33}H_{44}$	$C_{33}H_{46}$	$C_{32}H_{40}$	$C_{32}H_{42}$
C.	90,4	90,0	89,6	90,6	90,0
H.	9,6	10,0	10,4	9,4	10,0.

En considérant toutefois que l'acide quinovique, chauffé avec l'acide sulfurique, paraît perdre d'abord une molécule d'acide formique, et en supposant que le reste des atomes d'oxygène soit enlevé par l'acide sulfurique sous la forme d'eau, on serait conduit à adopter la dernière des formules citées, $C_{32}H_{42}$.

Des recherches ultérieures devront apprendre si cette conjecture est fondée ou non.

Acide apoquinovique.

MM. Liebermann et Giesel ont découvert, parmi les produits qui prennent naissance dans la réaction de l'acide sulfurique sur l'acide quinovique, un composé contenant 76,4°/₀ C et 9,16°/₀ H. Ils lui donnent le nom d'acide novique. Ils n'ont pas proposé de formule pour ce corps et n'ont pas exécuté d'analyses de ses sels.

Les résultats auxquels je suis arrivé, en ce qui concerne les produits de dédoublement de l'acide quinovique sous l'influence de l'acide sulfurique, diffèrent beaucoup de ceux des chimistes allemands. J'ai trouvé, en effet, que lorsque le liquide alcoolique séparé de la quinochromine était précipité par l'eau et que la masse résineuse ainsi obtenue était chauffée avec une solution de carbonate de soude, la plus grande partie de cette masse

restait inaltérée, mais qu'une autre partie se dissolvait, en donnant naissance au sel sodique d'un acide qui n'est nullement identique à l'acide novique et que j'appellerai en conséquence, pour l'en distinguer, acide *apoquinovique*. Tous mes efforts pour isoler le sel en question à l'état pur restèrent d'abord sans succès, des produits accessoires glutineux empêchant la cristallisation. Finalement pourtant, après un long repos, il se forma une masse confusément cristalline, qu'on put purifier sur un filtre par aspiration au moyen de la pompe de Bunsen, et qui, après quelques nouvelles cristallisations, fournit une combinaison homogène, en cristaux aciculaires.

La solution de ce sel donna par l'acide chlorhydrique un précipité gélatineux blanc, qui, après avoir été bien lavé, fut séché à 110° et soumis à l'analyse.

	Grammes.		Grammes.		Grammes.	
1)	0,1132	de l'acide donnèrent	0,2815	CO_2 et	0,0956	H_2O.
2)	0,1846	„ „ „	0,4607	„ „	0,1511	„

On déduit de là pour le carbone et l'hydrogène, en centièmes:

	1.	2.
C.	67,8	68,3
H.	9,4	9,1

Une analyse du sel sodique séché à 135° fournit les résultats suivants:

0,3451 gr. de sel, brûlés par $PbCrO_4$, donnèrent 0,7960 gr. CO_2 et 0,2734 gr. H_2O.

D'un autre côté, 0,5348 gr. de ce sel séché fournirent 0,1250 gr. $Na_2SO_4 = 8,1\%$.

Le sel fraîchement cristallisé de sa dissolution aqueuse, soumis à l'action de la chaleur, laissa dégager 0,1860 gr. = 17,5 % de H_2O.

De la combinaison des résultats obtenus, on peut déduire, comme expression la plus simple de l'acide apoquinovique, la

formule $C_{16}H_{26}O_4$; c'est ce que le tableau suivant met en évidence:

	Trouvé.		Calculé.
	1)	2)	
C_{16}	67,8	68,3	68,1
H_{26}	9,4	9,1	9,4
O_4	—	—	22,5
	Trouvé.		Calculé.
C_{16}	62,9		62,7
H_{25}	8,8		8,8
Na	8,1		7,5
O_4	—		12,2
	Trouvé.		Calculé.
$3\frac{1}{2}\,H_2O$	17,5		17,2

Peut-être, toutefois, la formule doit-elle être doublée, ce qui lui donnerait la forme $C_{32}H_{52}O_8$. En tenant compte de ce que 1 molécule d'acide formique prend naissance aux dépens de 1 molécule d'acide quinovique $C_{33}H_{52}O_6$, on peut bien admettre, je crois, que dans les deux combinaisons le nombre des atomes du carbone est indiqué exactement.

Outre les combinaisons bien distinctes que jai pu isoler parmi les produits du dédoublement de l'acide quinovique par l'acide sulfurique, j'ai obtenu comme masse principale une matière d'apparence amorphe, résineuse, que je n'ai pas étudiée à fond, mais à laquelle un examen sommaire a assigné une teneur en carbone assez élevée. Une fois j'ai obtenu 77,4°/₀ C et 8,9°/₀ H, une autre fois 81,5°/₀ C et 8,2°/₀ H. Il ne me paraît pas improbable que l'acide novique de Lieberman et Giesel ait fait partie de ce mélange.

Finalement, j'arrive à la conclusion que la formule la plus probable de la quinovine, en tant qu'on tienne compte seulement

des chiffres trouvés pour les proportions centésimales de carbone et d'hydrogène, serait $C_{39}H_{64}O_{11}$, qui s'accorde très bien avec le résultat moyen de mes analyses, comme on peut le voir ci-dessous:

	Calculé.	Trouvé en moyenne.
C_{39}	66,1	66,0
H_{64}	9,0	8,8
O_{11}	24,9	
	100,0	

Si l'on admet que dans le dédoublement la quinovite s'est séparée à l'état d'anhydride, la décomposition de la quinovine devrait, conformément à l'hypothèse de MM. Liebermann et Giesel, être représentée ainsi:

$$C_{38}H_{64}O_{11} = C_{32}H_{50}O_{6} + C_{6}H_{12}O_{4} + H_{2}O;$$

mais de là résulterait immédiatement que la formule proposée par moi pour l'acide quinovique attribue à l'hydrogène une proportion trop forte. Mes analyses de l'acide quinovique ne s'opposent d'ailleurs pas à cette conclusion, ainsi que le montrent les chiffres suivants:

	Calculé.	Trouvé en moyenne.
C_{33}	73,1	72,7
H_{50}	9,2	9,5
O_{8}	17,7	

DELFT, 28 mai 1882.

RECHERCHES

SUR LA

DIFFUSION DE QUELQUES COMPOSÉS ORGANIQUES ET INORGANIQUES,

PAR

J. D. R. SCHEFFER.

Première partie.

M. Fick [1]) a développé la théorie de la diffusion en partant de l'hypothèse que la quantité de sel, en dissolution, qui traverse dans l'unité de temps une section déterminée, est proportionnelle à la surface de cette section et à la différence de concentration de deux couches voisines, hypothèse qui s'exprime par la formule

$$d\,S = k.q.\frac{du}{dx}.dt,$$

où $d\,S$ représente la quantité de sel passant dans le temps dt par la couche horizontale x, q l'aire de la surface, du la différence de concentration entre la couche x et celle qui en est séparée par la distance dx.

La constante de la diffusion, k, est donc, d'après la formule ci-dessus, la quantité de sel qui, à l'état stationnaire, passerait dans l'unité de temps à travers l'unité de section, si la hauteur

---

[1]) Poggend. *Ann.*, t. XCIV, p. 59.

totale de l'appareil de diffusion était égale à l'unité de longueur et qu'entre ses deux extrémités il existât toujours une différence de concentration égale à l'unité.

Comme on ne connaît aucun caractère permettant de juger si l'état stationnaire est établi, MM. Simmler et Wild [1]) ont exposé différentes méthodes suivant lesquelles la valeur de k pourrait aussi être déduite d'un état initial connu, que le régime constant soit d'ailleurs atteint ou non.

De ces méthodes, quelques-unes, dites „optiques", ont été appliquées par MM. Voit [2]), Hoppe Seyler [3]) et Johannisjanz [4]), mais les résultats ainsi obtenus out plus tard été rejetés par M. Stefan [5]), comme ne méritant pas confiance.

J'ai donc suivi une autre voie. Qu'on se représente un vase cylindrique ouvert en haut et fermé en bas, rempli jusqu'à une certaine hauteur d'une solution saline, puis, par-dessus, d'eau distillée. Si ce vase est placé verticalement au sein d'une grande masse d'eau, dans laquelle la solution saline se diffuse, de sorte qu'au bord supérieur du vase la concentration puisse toujours être regardée comme égale à zéro, la quantité de sel qui sort du vase pendant le temps T, compté à partir du début de l'expérience, sera donnée, suivant MM. Simmler et Wild, par la formule

$$Q = \frac{8u_0qh}{\pi^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos\frac{2p+1}{2h}\pi h'}{(2p+1)^2} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{2p+1}{2h}\pi\right)^2 kT} \right\},$$

où h désigne la hauteur du vase cylindrique, h_1 la distance du bord supérieur de ce vase jusqu'à la surface de séparation de la solution saline et de l'eau, u_0 le degré de concentration, q la section et k le coefficient de diffusion.

---

[1]) Poggend. *Ann.*, t. C, p. 217.

[2]) Poggend. *Ann.* t. CXXX, p. 227, 393.

[3]) *Jahresbericht f. Chemie*, 1866, p. 71.

[4]) Wiedemann *Ann.*, t. II, p. 24.

[5]) *Wiener Akad. Ber.*, t. LXXVIII, p. 957.

Dans le cas de $h_1 = \frac{1}{3} h$, c'est-à-dire lorsque le cylindre est rempli aux $\frac{2}{3}$ de solution saline et pour $\frac{1}{3}$ d'eau pure, cette formule devient:

$$Q = \frac{2u_0qh}{3} - \frac{4\sqrt{3}u_0qh}{\pi^2}\left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{49} e^{-\left(\frac{7\pi}{2h}\right)^2 kT} + \text{etc.} \right\}$$

Le cylindre ayant contenu à l'origine uue quantité de sel $Q_0 = \frac{2u_0qh}{3}$, il en restera donc, après le temps T,

$$Q_0 - Q = \frac{4\sqrt{3}u_0qh}{\pi^2}\left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \text{etc.} \right\},$$

ou, en parties de la quantité primitive:

$$\frac{Q_0 - Q}{Q_0} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \text{etc.} \right\},$$

D'apres MM. Simmler et Wild, il suffirait, dans la plupart des cas, de tenir compte du premier terme de cette série. Mais il vaut mieux, évidemment, construire une fois pour toutes un tableau des valeurs correspondantes de $\frac{Q_0 - Q}{Q_0}$ et de $\frac{kT}{h^2}$, en faisant entrer dans le calcul autant de termes de la série qu'on le jugera nécessaire. A la seule condition de prendre toujours $h_1 = \frac{1}{3}h$, ce tableau peut alors servir, sans aucun nouveau calcul, pour toutes les expériences de diffusion ultérieures du genre de celles dont il est ici question.

Voici ce tableau, tel qu'a bien voulu le calculer, à ma demande, mon ancien collègue M. Korteweg:

$\frac{Q_0-Q}{Q_0}$	$\frac{kT}{h^2}$	D	$\frac{Q_0-Q}{Q_0}$	$\frac{kT}{h^2}$	D.
1.00	0.00000		0.68	0.17722	— 592
0.99	0.01865		0.67	0.18323	— 601
0.98	0.02495	—630	0.66	0.18932	— 609
0.97	0.03033	—538	0.65	0.19550	— 618
0.96	0.03533	—500	0.64	0.20178	— 628
0.95	0.04012	—479	0.63	0.20817	— 639
0.94	0.04480	—468	0.62	0.21466	— 649
0.93	0.04943	—463	0.61	0.22125	— 659
0.92	0.05402	—459	0.60	0.22795	— 670
0.91	0.05862	—460	0.59	0.23476	— 681
0.90	0.06323	—461	0.58	0.24168	— 692
0.89	0.06784	—461	0.57	0.24873	— 705
0.88	0.07249	—465	0.56	0.25590	— 717
0.87	0.07718	—469	0.55	0.26320	— 730
0.86	0.08191	—473	0.54	0.27064	— 744
0.85	0.08668	—477	0.53	0.27821	— 757
0.84	0.09150	—482	0.52	0.28595	— 774
0.83	0.09637	—487	0.51	0.29382	— 787
0.82	0.10130	—493	0.50	0.30184	— 802
0.81	0.10628	—498	0.49	0.31002	— 818
0.80	0.11132	—504	0.48	0.31838	— 836
0.79	0.11643	— 511	0.47	0.32692	— 854
0.78	0.12161	—518	0.46	0.33563	— 871
0.77	0.12684	—523	0.45	0.34454	— 891
0.76	0.13214	—530	0.44	0.35365	— 911
0.75	0.13751	—537	0.43	0.36296	— 931
0.74	0.14295	—544	0.42	0.37250	— 954
0.73	0.14846	—551	0.41	0.38227	— 977
0.72	0.15405	—559	0.40	0.39228	—1001
0.71	0.15972	—567	0.39	0.40254	—1026
0.70	0.16547	—575	0.38	0.41306	—1052
0.69	0.17130	—583			
		—592			

La première colonne indique la portion du sel qui fut retrouvée dans le cylindre après la diffusion; la seconde fait connaître la valeur correspondante de $\frac{kT}{h^2}$, valeur dont on pouvait donc déduire immédiatement, en la multipliant par h^2 et la divisant par T, la valeur du coefficient de diffusion; la troisième colonne donne les différences entre les termes successifs de la seconde. Les valeurs

intermédiaires ont été calculées par interpolation rectiligne.

Les conditions auxquelles les expériences doivent satisfaire sont donc: que par le bas du cylindre il ne puisse s'échapper de sel, et qu'au niveau de son orifice la concentration reste toujours 0.

Pour réaliser ces conditions, MM. Simmler et Wild proposent une légère modification à la méthode suivie par Graham [1]) et aussi, plus tard, par M. Marignac [2]), modification consistant à placer le cylindre non pas sur le fond du vaisseau rempli d'eau, mais aussi haut que possible. En effet, le sel qui se diffuse dans l'eau ambiante, étant plus lourd que celle-ci, commencera bien par y descendre, mais, une fois arrivé au fond, il tendra de nouveau, en vertu de la diffusion, à remonter; par conséquent, plus sera grande la différence de niveau entre le fond du vaisseau extérieur et l'orifice du petit cylindre, plus il faudra de temps au sel pour parcourir ce chemin, et mieux les conditions des expériences répondront aux hypothèses faites pour l'établissement des formules.

Dans un certain nombre de petits verres cylindriques, à fond plat et à bord dressé à l'émeri, je choisis les meilleurs, dont je déterminai la capacité et la hauteur. Pour trouver la capacité, le cylindre, rempli d'eau jusqu'au bord, recouvert d'une plaque de verre et bien essuyé à l'extérieur, était équilibré sur la balance; ensuite on le vidait, on le séchait avec soin, de même que l'obturateur, et on le remettait sur le plateau; cela fait, à l'aide d'une burette, — qui plus tard, dans les expériences de diffusion, servit aussi toujours à remplir les cylindres, — on y versait de l'eau jusqu'à ce que l'équilibre de la balance fût rétabli.

La hauteur des cylindres était déterminée en mesurant la ligne oblique la plus longue qui pouvait être menée à leur in-

---

[1]) *Ann. d. Chem. Pharm.*, t. LXXVII, p. 56, 129; t. LXXX, p. 197.

[2]) *Ann. de Chim. et de Phys.* (5), t. II, p. 546, ou *Compt. rend.*, t. LXXVIII, p. 1523.

térieur; à cet effet, je faisais mouvoir le long du bord du cylindre une aiguille à tricoter bien droite, puis je mesurais, à l'aide d'un vernier, la distance de l'extrémité de l'aiguille à la rayure extrême ainsi obtenue. Pour chaque cylindre cette ligne était déterminée en quatre points différents, et on prenait la moyenne des quatre valeurs. De la capacité $V = \pi\, h\, R^2$ et de la ligne en question $S = \sqrt{h^2 + 4\, R^2}$ on déduisait, par le calcul, la hauteur h.

Le tableau suivant contient, dans la première colonne, le signe donné au verre cylindrique; dans la seconde, le nombre de cm³ d'eau nécessaires pour le remplir; dans la troisième, la moyenne des lignes obliques mesurées, en cm; dans la quatrième, la hauteur en cm.; dans la cinquième, le carré de la hauteur; dans le sixième, le carré du rayon.

	$hR^2\pi$	$\sqrt{h^2+4R^2}$	h	h^2	R^2
A.	88.95	10.21	9.61	92.4	2.96
B.	96.8	10.095	9.42	88.7	3.29
D.	93.3	10.15	9.51	90.4	3.14
F.	94.15	10.15	9.51	90.4	3.14
G.	97.8	10.22	9.56	91.4	3.25
H.	93.3	10.02	9.37	87.8	3.155
K.	91.5	10.08	9.45	89.3	3.08
N.	96.95	10.31	9.67	93.5	3.20
O.	94.2	10.10	9.45	89.3	3.175

Il fallait maintenant s'assurer d'abord si la méthode fournissait pour la constante de diffusion des valeurs méritant confiance. Cela était d'autant plus nécessaire que, indépendamment des difficultés expérimentales, on pourrait aussi opposer à la méthode une objection théorique. Il y a lieu de se demander, en effet, si la formule

$$d\,S = k.\,q.\,\frac{du}{dx}.\,dt\,,$$

qui certainement sera valable aussitôt que la diffusion aura établi, sous le rapport de la concentration, un passage insensible entre la solution saline et l'eau distillée, peut aussi déjà être appliquée dans la première période de la diffusion, alors qu'à la limite miroitante des deux liquides il s'opère un changement brusque de concentration, et que par conséquent $\frac{du}{dx}$ acquiert des valeurs considérables.

Les expériences que j'ai faites à ce sujet sur des dissolutions d'acide chlorhydrique, l'une des matières qui diffusent le plus rapidement, expériences où la durée de la diffusion a varié de 1 à 18 jours et la quantité d'acide restée dans le cylindre de 97°/₀ à 39°/₀, ont toutefois donné pour *k* des valeurs concordantes et démontré que l'écart présumé, s'il existe, perd toute influence sur le résultat lorsque les expériences sont suffisamment prolongées. Quelques-unes d'entre elles, arrêtées au bout d'un seul jour, semblent indiquer, il est vrai, que la diffusion s'opère initialement avec un peu plus de rapidité que dans la suite; mais on ne doit pas oublier que, précisément pour ces expériences, une petite erreur dans la détermination de la proportion de matière restée dans le cylindre exerce une grande influence sur la valeur de *k*.

Voici comment les expériences étaient conduites. A l'aide de la burette, les petits verres cylindriques étaient remplis, exactement jusqu'aux $\frac{2}{3}$, de la dissolution à étudier; je les plaçais ensuite dans de grands vases à précipité, à l'intérieur desquels étaient maintenues horizontalement, à environ 12 cm. du bord supérieur, deux baguettes de verre, unies à leurs extrémités par des bouchons de liège. Les bouchons pressent fortement contre la paroi du vase et forment ainsi, avec les baguettes, un support solide propre à recevoir les petits verres cylindriques; il est d'ailleurs facile de faire subir à ce pont de légers déplacements, de manière à ce que les cylindres aient toujours une position bien verticale. Les grands vases à précipité avaient une capacité d'environ $3\frac{1}{2}$ litres; la dissolution employée diffusait

donc dans environ 40 fois son volume d'eau. Ces vases étaient disposés dans de grandes caisses de bois qui, pour écarter autant que possible les variations de température, étaient garnies intérieurement d'une épaisse couche de paille et de foin, et placées dans une cave. Je versais alors assez d'eau dans les vases pour les remplir en grande partie, j'y introduisais le petit verre rempli aux $\frac{2}{3}$ de la dissolution, et au bout d'nne couple d'heures, lorsqu'on pouvait admettre que le contenu de ce verre avait pris la température de la cave, j'achevais de le remplir avec de l'eau. A cet effet, je faisais flotter sur la solution un petit disque de liège mouillé, dans lequel était fixée perpendiculairement une mince baguette de verre, puis je laissais couler de l'eau le long de cette baguette, lentement et goutte à goutte; l'eau était fournie par une éprouvette dont le fond avait été étiré en un long tube capillaire, et qui était soutenue par un support, l'extrémité du tube capillaire en contact avec la baguette. En opérant ainsi, on obtient une surface parfaitement réfléchissante. Le remplissage du verre cylindrique terminé, ce qui demandait environ une demi-heure, le grand vase extérieur était rempli d'eau (provenant d'une grande bouteille conservée dans la cave) presque jusqu'au niveau de l'orifice du verre cylindrique, après quoi, au moyen d'une pipette, on ajoutait lentement et avec précaution de l'eau, en quantité suffisante pour qu'elle s'élevât à environ $\frac{1}{2}$ cm. au-dessus du bord du verre cylindrique [1]). Lorsqu'il s'agissait de mettre fin à la

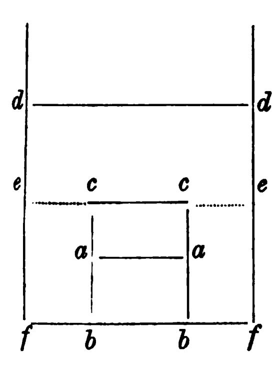
---

[1]) MM. van Bemmelen et Dibbits, dans leur rapport à l'Académie des sciences d'Amsterdam sur cette première partie de mon travail, ont manifesté la crainte que la faible hauteur de l'eau au-dessus des verres cylindriques, n'ait agi défavorablement sur la diffusion. Quelques expériences complémentaires ont donc été faites, dans le but spécial de décider jusqu'à quel point la situation du verre cylindrique, à une profondeur plus ou moins grande au-dessous du niveau de l'eau, exerce de l'influence sur les valeurs obtenues. Sur le fond d'un vase à précipité fut placé un petit verre cylindrique en partie rempli d'une dissolution d'indigo, puis j'achevai de remplir ce verre avec de l'eau, suivant le procédé ci-dessus décrit, et

diffusion, le cylindre était rapidement obturé par un disque de verre, puis retiré du vase à précipité et lavé à l'eau sur toute sa surface extérieure; le contenu en était alors versé dans une

---

je versai aussi de l'eau dans l'espace compris entre le verre et le vase à précipité, jusqu'à ce qu'elle s'élevât à environ 3 cm. au-dessus du bord du verre. Je reconnus ainsi que le liquide bleu foncé, contenu en *aabb*, passe lentement dans l'eau; que la couche *aacc* se colore en bleu très pâle, tandis qu'aucune coloration ne peut être observée dans l'eau qui se trouve au-dessus de *cc*; l'eau *eeff*, an contraire, est distinctement teintée en bleu, et cette teinte augmente en force à mesure qu'on se rapproche du fond du vase à précipité. Ce n'est qu'après une longue durée de l'expérience, lorsque l'eau en *eeff* est devenue d'un bleu intense, que la matière colorante s'élève aussi au-dessus de la ligne *ecce*.



Dans trois autres expériences, portant sur l'acide chlorhydrique, les verres cylindriques furent placés à des profondeurs différentes au-dessous du niveau de l'eau; ces verres avaient les dimensions suivantes:

	$h\pi r^2$	$\sqrt{h^2+4r^2}$	h	h^2	r
1.	55.41 cM³.	6.08 cM.	4.65	21.62	1.94
6.	48.95 〃	5.86 〃	4.54	20.61	1.85
7.	53.12 〃	6.03 〃	4.68	21.90	1.90

Les résultats des expériences, qui furent exécutées de la même manière que celles rapportées dans le texte, sont contenus dans le tableau suivant:

Cylindre.	rempli de cc d'acide	32 cc de l'acide employé étant étendus jusqu'à 125 cc, on a 1 cc d'acide = cc Na OH	le liquide resté dans le verre à diff. étant étendu jusqu'à 125 cc, on a 1 cc d'acide = cc Na OH	profondeur du cylindre au-dessous du niveau de l'eau	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	temp.	const. de la diff.
1.	36.9	1.222	0.650	$21\frac{1}{2}$ mm.	3j $22\frac{1}{4}$h	0.4613	$6\frac{1}{2}$°	1.842
6.	32.6	1.222	0.549	$5\frac{1}{2}$ 〃	3 $21\frac{1}{2}$	0.4410	$6\frac{1}{2}$°	1.866
7.	35.4	1.222	0.618	12 〃	3 $22\frac{1}{8}$	0.4572	$6\frac{1}{2}$°	1.887

capsule et étendu jusqu'au volume de 250 cc. La durée des expériences variait de 1 à 20 jours; la température indiquée pour chacune d'elles est la moyenne des températures notées au cours de la diffusion; les plus grandes oscillations accusées par les thermomètres, qui étaient placés au-dessus des caisses, s'élevaient à 2—3°.

Des dissolutions telles qu'elles étaient soumises à la diffusion, on prenait habituellement aussi 50 cc, qu'on étendait jusqu'à 250 cc; dans ces conditions, les liquides, avant et après la diffusion, s'accordent assez bien quant au degré de concentration, ce qui élimine autant que possible les erreurs des déterminations quantitatives. Dans le titrage des acides je me servais, comme indicateur, de la phénolphtaléine, dont je dissolvais, suivant le précepte connu, 1 partie dans 30 parties d'alcool, et de cette dissolution j'employais 1 ou 2 gouttes pour chaque 100 cc de liquide à titrer; avec 1 goutte d'une solution sodique au titre $\frac{1}{10}$ normal, le passage de la réaction acide à la réaction alcaline est alors nettement observable.

Après que l'exactitude de la méthode eut été reconnue pour l'acide chlorhydrique, je l'ai appliquée aussi à la détermination de la constante de diffusion de différentes autres combinaisons; les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux suivants.

Il me semble que ces résultats, aussi bien que celui de l'expérience avec l'indigo, lèvent le doute émis par MM. van Bemmelen et Dibbits sur l'exactitude de mes déterminations de la valeur des constantes de diffusion, et montrent que la hauteur de l'eau au-dessus des verres cylindriques, $\frac{1}{2}$ cm environ, était suffisante.

JANVIER 1882.

Acide chlorhydrique.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc d'acide étant étendus jusqu'à 250 cc, on a:	le contenu du verre à diffusion étant étendu jusqu'à 250 cc, on a:	durée de la diff.	resté dans le verre à diff. en parties de la quantité employée	tem-pérat.	const. de la diff.
N.	64.6 cc H Cl	1 cc d'acide = 2.1 cc KOH	1 cc d'acide = 2.64 cc KOH	1 j 1 h	0.9730	7½°	2.57
H.	62.2 „ „	1 „ „ = 2.1 „ „	1 „ „ = 2.42 „ „	1 23¼	0.9263	7½	2.28
D.	62.2 „ „	1 „ „ = 2.1 „ „	1 „ „ = 2.33 „ „	3 ¼	0.8919	7½	2.01
D.	62.2 „ „	1 „ „ = 2.1 „ „	1 „ „ = 2.22 „ „	3 23¼	0.8498	7½	1.98
F.	62.8 „ „	1 „ „ = 2.1 „ „	1 „ „ = 2.07 „ „	5 5/6	0.7848	7½	2.14
K.	61 „ „	1 „ „ = 2.1 „ „	1 „ „ = 1.91 „ „	6 2 1/12	0.7455	7½	2.04
A.	59.3 „ „	1 „ „ = 2.11 „ „	1 „ „ = 1.71 „ „	8 2⅔	0.6833	8	2.00
K.	61 „ „	1 „ „ = 2.11 „ „	1 „ „ = 1.55 „ „	10 2 1/12	0.6021	8	2.00
D.	62.2 „ „	1 „ „ = 2.11 „ „	1 „ „ = 1.45 „ „	12 3/10	0.5524	8	1.97
O.	62.8 „ „	1 „ „ = 2.65† „ „	1 „ „ = 2.85† „ „	3 1 1/12	0.8563	8½	2.45
H.	62.2 „ „	1 „ „ = 2.11 „ „	1 „ „ = 1.18 „ „	14 ½	0.4495	8½	2.16
F.	62.8 „ „	1 „ „ = 2.11 „ „	1 „ „ = 1.15 „ „	16 1 7/10	0.4339	8½	2.03
G.	65.2 „ „	1 „ „ = 2.11 „ „	1 „ „ = 1.07 „ „	17 19 5/6	0.3889	8½	2.07
K.	61 „ „	1 „ „ = 2.575 „ „	1 „ „ = 3.074 „ „	1 2 5/6	0.9785	9	2.06
A.	59.3 „ „	1 „ „ = 2.575 „ „	1 „ „ = 2,878 „ „	1 19 5/6	0.9424	9	2.21
D.	62.2 „ „	1 „ „ = 1.275 „ NaOH	1 „ „ = 1.104 „ NaOH	6 1 3/20	0.6960	15½	2.51
H.	62.2 „ „	1 „ „ = 1.32 „ „	1 „ „ = 1.0363 „ „	6 23	0.6313	15½	2.62

† Dans cette expérience, les liquides ne furent pas étendus jusqu'à 250 cc, mais jusqu'à 500 cc.

Dans les six premiers verres, la densité de la solution chlorhydrique employée était d'environ 1,04 ; dans les nos. 7, 8, 9, 11, 12 et 13, elle était un peu plus forte; dans le n°. 10, d'environ 1,10; dans les nos. 14 et 15, d'environ 1,05; dans les nos. 16 et 17, d'environ 1,04.

La comparaison, dans ce tableau, des valeurs obtenues pour le coefficient de diffusion semble indiquer qu'il convient de continuer l'expérience jusqu'à ce qu'au moins 10 pour cent de la matière soient diffusés. Une même erreur dans le dosage exerce aussi, sur le chiffre du coefficient tel qu'il résulte de la valeur $\frac{kT}{h^2}$, une influence moindre à mesure que la quantité diffusée est plus grande; celle de 10 pour cent me paraît toutefois suffisante pour assurer l'exactitude des résultats.

Acide oxalique.

L'acide avait été soumis à des cristallisations répétées dans l'eau ; chauffé sur une lame de platine, il ne laissait aucun résidu.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc d'acide étant étendus jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	le contenu du verre à diffusion étant étendu jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	durée de la diff.		resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	tem- pérat.	const. de la diff.
G.	65,2 cc	0.616 cc KOH	0.658 cc KOH	12j	$21\frac{1}{4}$h	0.8191	$7\frac{1}{2}$°	0.72
A.	59.3 „	0.956 „ „	0.976 „ „	10	$23\frac{2}{3}$	0.8608	$7\frac{1}{2}$	0.686
O.	62.8 „	0.642 „ „	0.713 „ „	8	23	0.8842	$7\frac{1}{2}$	0.70

La solution de l'acide avait dans le verre A une concentration d'environ 6°/₀, dans G et O, d'environ 4°/₀.

Acide acétique.

L'acide pur, obtenu par la distillation fractionnée d'une grande quantité d'acide cristallisable, avait été étendu d'eau jusqu'à ce que la concentration ne fût plus que d'environ 8°/₀.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc d'acide étant étendus jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	le contenu du verre à diffusion étant étendu jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	tem-pérat.	const de la diff.
K.	61 cc	1.77 cc KOH	1.87 cc KOH	11j	0.8659	8°	0.64
F.	62.8 „	2.05 „ „	2.22 „ „	11	0.8622	8	0.66
D.	62.2 „	1.97 „ „	2.1 „ „	11	0.8569	8	0.68
F.	62.8 „	†0.5 „ Na OH	0.835 „ Na OH	12 $21\frac{1}{2}$h	0.7978	$14\frac{1}{2}$	0.79
G.	65.2 „	†0.5 „ „	0.847 „ „	12 $21\frac{1}{2}$	0.7794	$14\frac{1}{2}$	0.86
N.	64.6 „	†0.5 „ „	0.873 „ „	12 $21\frac{1}{4}$	0.8109	$14\frac{1}{2}$	0.77

† Ici, 30 cc de la solution acétique employée avaient été étendus jusqu'à 250 cc.

Acide citrique.

De l'acide citrique ordinaire ayant été purifié par différentes cristallisations dans l'eau, puis séché entre des doubles de papier à filtre, on en prépara des solutions à environ 5 et 9°/₀. Au bout de 12 jours l'expérience fut arrêtée, de crainte qu'un commencement de moisissure ne rendît les résultats incertains.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc d'acide étant étendus jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	le contenu du verre à diffusion étant étendu jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	tem-pérat.	const de la diff.
G.	65.2 cc	0.629 cc KOH	0.74 cc KOH	12j $22\frac{2}{15}$h	0.9022	9°	0.44
A.	59.3 „	0.689 „ „	0.68 „ „	12 $22\frac{1}{12}$	0.9115	9°	0.41
F.	62.8 „	†1.118 „ „	1.287 „ „	12 $23\frac{1}{12}$	0.9130	9°	0.40

† était étendu à 251 cc.

Acide tartrique

L'acide du commerce fut purifié de la même manière que l'acide citrique, après quoi on en fit des solutions à environ 4 et 7°/₀.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc d'acide étant étendus jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	le contenu du verre à diffusion étant étendu jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	durée de la diff.		resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	tem-pérat.	const. de la diff.
D.	62.2 cc	0.845 cc KOH	0.806 cc KOH	26j	$23\frac{3}{4}$h	0.7668	9°	0.43
H.	62.2 „	0.845 „ „	0,776 „ „	26	$3\frac{7}{12}$	0.7382	9°	0.48
O.	62.8 „	0.498 „ „	0.4965 „ „	22	$23\frac{7}{12}$	0.7938	9°	0.45
K.	61 „	0.498 „ „	0.482 „ „	22	$3\frac{7}{12}$	0.7934	9°	0.46

Acide succinique.

Cet acide subit également des cristallisations réitérées; la solution employée contenait à peu près 5°/₀ d'acide.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc d'acide étant étendus jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	le contenu du verre à diffusion étant étendu jusqu'à 250 cc, on a : 1 cc =	durée de la diff.		resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	tem-pérat.	const. de la diff.
K.	61 cc	0.393 cc KOH	0.382† cc KOH	18j	$\frac{5}{12}$h	0.7999	15°	0.55
D.	62.2 „	0.393 „ „	0.395 „ „	17	$23\frac{1}{2}$	0.8080	15°	0.54
A.	59.3 „	0.393 „ „	0.377 „ „	18	$\frac{1}{4}$	0.8089	15°	0.55

† était étendu à 251 cc.

Mannite.

La mannite, provenant de la fabrique de M. Kahlbaum, fut soumise à une nouvelle cristallisation dans l'alcool, puis séchée et dissoute dans l'eau. Pour déterminer la quantité de matière dissoute, un volume connu de la solution était évaporé dans une capsule de platine au bain-marie, et le résidu séché à 100° jusqu'à poids constant.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc de la sol. empl. contiennent	quantité restée dans le verre à diffusion	durée de la diff.		resté dans le verre à diff., eu parties de la quantité employée	tem-pérat.	const. de la diff.
A.	59.3 cc	2.2113 gr.	2.1840 gr.	23j	$2\frac{2}{3}$h	0.8328	10°	0.38
F.	62.8 „	2.2113 „	2.2033 „	27	$3\frac{5}{12}$	0.7933	10°	0.38
G.	65.2 „	2.2113 „	2.4054 „	21	$23\frac{1}{12}$	0.8342	10°	0.39

Acétate de soude.

On fit cristalliser le sel à différentes reprises, puis on en prépara des solutions de concentration diverse. La quantité de sel était déterminée en évaporant un volume connu de la solution avec un excès d'acide chlorhydrique, calcinant et pesant.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc de la sol. étant étendus à 250 cc, on trouve dans	le contenu du verre à diff. étant étendu à 250 cc, on trouve dans	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	tem- pérat.	const. de la diff.
D.	62.2 cc	20 cc 0 2480gr.	20 cc 0.2081gr.	23j $21\frac{7}{10}$h	0.6745	14°	0.68
A.	59.3 „	20 „ 0.2480 „	20 „ 0.2145 „	19 $22\frac{8}{15}$	0.7293	14	0.69
F.	62.8 „	50 „ 0.4734 „	50 „ 0.3869 „	24 22	0.6507	15	0.71
K.	61 „	50 „ 0.1962 „	50 „ 0.1590 „	23 $22\frac{37}{60}$	0.6643	14	0.70
G.	65.2 „	50 „ 0.3725 „	50 „ 0.3186 „	24 $21\frac{7}{12}$	0 6559	15	0.70
N.	64.6 „	50 „ 0.9294 „	50 „ 0.8351 „	24 $21\frac{5}{6}$	0.6954	15	0.63
H.	62.2 „	50 „ 0.3521 „	50 „ 0.2614 „	26 22	0·5968	14	0.75

en A et D il y avait donc, dans 100 cc de la solution, 8.68 gr. $C_2H_3O_2Na$
„ F „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 6.63 „ „
„ K „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 2.75 „ „
„ G „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 5.21 „ „
„ N „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 13.01 „ „
„ H „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 4.93 „ „

Hydrate de chloral.

Après avoir fait subir à l'hydrate de chloral plusieurs cristallisations dans le sulfure de carbone. on en prépara deux solutions, l'une à environ 5°/₀, l'autre à environ 8°/₀. L'hydrate de chloral dissous était dosé, suivant la méthode de M. Victor Meyer [1]), en le décomposant par une quantité connue de so-

[1] *Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch.* Bd. 6 S 600.

lution sodique normale et titrant par l'acide oxalique la quantité de base ajoutée en excès. 50 cc des solutions employées étaient étendus, de même que le contenu des verres après la diffusion, jusqu'à 250 cc, et des liquides ainsi obtenus on prenait 100 ou 150 cc pour la décomposition par la lessive sodique normale.

Verre cylindr.	rempli de cc	A. 100 cc de la sol. empl. + 60 cc Na OH étant étendus à 250 cc, on a 1 cc = cc d'acide	B. 100 cc de la sol. diff. + 60 cc Na OH étant étendus à 250 cc, on a 1 cc = cc d'acide	en A la quantité de Na OH encore existante corresp. à †† cc d'acide	en B la quantité de Na OH encore existante corresp. à †† cc da'cide	la quant. disparue totale de Na OH corr. en sol. empl. à cc	la quant. disparue totale de Na OH corr. dans le cyl. à diff. à cc	durée de la diff.	resté dans le verre à diff. en parties de la quantité employée	temp.	const. la dif
H.	62.2	0.8437	0.827	210.925	206.75	111.31	121.75	11j $19\frac{1}{6}$h	0.8793	9°	0.5
O.	62.8	0.8437	0.730†	210.925	182.50	111.31	121.58	13 19	0.8697	9°	0.5
D.	62.2	0.8634†	0.903	215.85	225.75	66.0	74.25	9 23	0.9044	9°	0.55
K.	61.	0.8634†	0.9105	215.85	227.625	66.0	69.56	12 $23\frac{1}{12}$	0.8639	9°	0.5

† ici, 150 cc de la sol. d'hydrate de chloral, additionnés de 60 cc de sol. sodique, avaient été étendus jusqu'à 250 cc.

†† Lorsque les 60 cc de sol. sodique étaient étendus jusqu'à 250 cc, 1 cc de solution sodique correspondait à 1.0218 cc d'acide.

Chlorure d'ammonium.

Le sel employé avait subi plusieurs nouvelles cristallisations dans l'eau chaude. La solution contenait 4.66°/₀ de sel.

Verre cylindr.	rempli de	50 cc de sol. étant étendus à 250 cc, 50 cc de cette liq. fournissent, après évap. et dessicc. à 100° jusqu'à poids constant:	le contenu du verre à diff. étant étendu à 250 cc, 50 cc de cette liq. fournissent, après évap. et dess. à 100° jusqu'à poids constant:	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	temp.	co la
F.	62.8 cc	0.4659 gr.	0.2733 gr.	22j $23\frac{5}{6}$h	0.4670	$17\frac{1}{2}$°	1.
G.	62.2 „	0.4659 „	0.3228 „	18 $21\frac{1}{12}$	0.5313	$17\frac{1}{2}$°	1.
N.	64.6 „	0.4659 „	0.2868 „	23	0.4764	$17\frac{1}{2}$°	1.

Bien qu'il y ait des écarts assez forts entre quelques-uns des nombres fournis par ces expériences, je crois pouvoir conclure que la méthode, telle qu'elle a été décrite dans ce qui précède, conduit à des résultats utilisables. L'existence d'écarts n'a pas de quoi surprendre si l'on considère les différentes causes d'erreur auxqu'elles ces expériences sont exposées: les courants qui se produisent à la suite des variations de température inévitables dans un laps de temps d'une vingtaine de jours, et les légères perturbations qu'on détermine, malgré toutes les précautions, en versant les deux liquides l'un sur l'autre dans le verre cylindrique, ne permettent guère un accord parfait entre les valeurs obtenues pour k.

Dans le tableau suivant, j'ai réuni les résultats des expériences ci-dessus communiquées et ceux des expériences de Graham [1]), tels qu'ils ont été calculés récemment par M. Stefan [2]).

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, t. CXXI.
[2]) *Wiener Akad. Ber.*, t. LXXIX.

		Formule.	Poids mol.	Vol. mol.	Const. de la diff.	Temp.	
1.	Ac. chlorhydrique .	HCl	36.5		1.742	5°	GRAHAM
	»	»	»		2.07	8°	SCHEFFER
	»	»	»		2.56	15½°	»
2.	Chlorure d'ammonium	NH^4Cl	53.5	35.2[1]	1,31	17½°	»
3.	Chlorure de sodium	NaCl	58.5	26.2[1]	0.76	5°	GRAHAM
	»	»	»	»	0.91	10°	»
4.	Ac. acétique	$C_2H_4O_2$	60		0.66	8°	SCHEFFER
	»	»	»		0.78	14½°	»
5.	Ac. succinique . . .	$C_4H_6O_4$	118	75.3[1]	0.55	15°	»
6.	Acide oxalique . . .	$C_2O_4H_2$ 2 aq	126	76.4[1]	0.71	7½°	»
7.	Acétate de soude . .	$C_2H_3O_2Na$ 3 aq	136	97.2[1]	0.69	15°	»
8.	Ac. tartrique	$C_4H_6O_6$	150	85.7[1]	0.45	9°	»
9.	Hydrate de chloral.	C_2Cl_3OH. aq	165.5	91.0[1]	0.55	9°	»
10.	Mannite.	$C_6H_{14}O_6$	182	122.5[1]	0.38	10°	»
11.	Ac. citrique.	$C_6H_8O_7$	192	135.2[2]	0.41	9°	»
12.	Sulfate de magnésie	$Mg SO_4$ 7 aq	246		0.354	10°	GRAHAM
13.	Sucre de canne. . .	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342	215.4[1]	0.312	9½°	»
14.	Gomme arabique . .	$(C_6H_{10}O_5)x$	162.x		0.13	10°	»
15.	Ac. tannique	—	—		0.101	10°	»
16.	Caramel.	—	—		0.047	10½°	»
17.	Albumine	—	—		0.063	13°	»

[1] Nombres empruntés à M. SCHRÖDER, *Ber. d. deutsch. Chem. Ges.*, t. X, p. 185 t. XII, p. 120, 562.

[2] Calculé d'après le nombre 1,553 donné par M. Buignet, pour la densité de $C_6H_8O_7$, H_2O

Des recherches sur la vitesse de diffusion de quelques sels ont aussi été publiées dernièrement par M. Schuhmeister [1]) et par M. Long [2]).

Avec les données qu'on possède, une comparaison entre les valeurs du coefficient de diffusion trouvées par d'autres observateurs et par moi n'est possible que pour le chlorure d'ammonium et l'acide chlorhydrique.

M. Schuhmeister a trouvé $k = 1,33$ pour une solution de chlorure d'ammonium à 12°/$_0$, la température étant de 20°½; j'ai obtenu $k = 1.32$ pour une solution du même sel à 4.66°/$_0$, le thermomètre marquant 17°½.

Graham a trouvé pour la constante de diffusion de l'acide chlorhydrique, à la température de 5°, $k = 1.742$; comme moyennes de 13 observations faites par moi à la température moyenne de 8°, et de 2 observations à la températnre de 15°½, le calcul me donne: $k_8 = 2{,}07$ et $k_{15,5} = 2{,}57$. Pour rendre la comparaison possible, j'admets qu'entre les limites 5°—15°,5 la vitesse de diffusion augmente avec la température suivant la formule $k_t = k_0\,(1 + \alpha t)$. Les résultats de mes expériences sont alors représentés par $2.07 = k_0\,(1 + 8\alpha)$ et $2{,}57 = k_0\,(1 + 15{,}5\alpha)$, d'où l'on tire $k_0 = 1{,}35$ et $\alpha = 0.066$; il en résulte $k_5 = 1{,}77$, ce qui s'accorde avec la valeur trouvée par Graham à cette température.

BREDA, novembre 1881.

Seconde partie.

Les recherches dont je vais maintenant rendre compte ont été exécutées de la même manière que celles qui ont fourni le sujet des pages précédentes; seulement, j'y ai fait usage de verres cylindriques plus petits, afin d'abréger la durée des expériences et de diminuer ainsi la chance de variations de température pendant cette durée.

---

1) *Wiener Akad. Ber.*, t. LXXIX, p. 603.

2) *On the diffusion of liquids* (thèse inaugurale), 1879, Tübingen, H. Laupp.

La burette servant à remplir les verres était graduée de telle sorte que 1 gramme d'eau correspondait à 0,994 cc de la burette; le tableau ci-dessous donne les dimensions des verres employés, dimensions obtenues par la méthode précédemment décrite.

Verre cyl.	vol. d'après le poids en CC.	vol. d'après la burette en CC	$\sqrt{h^2+4r^2}$ en cm.	h en cm.	h^2.	r^2.		Verre rempli de
1.	55.70	55.31	6.08	4.66	21.72	3.805	36.9	CC de la burette
2.	51.70	51.34	6.00	4.70	22.09	3.501	34.2	" " " "
3.	53.18	52.81	6.04	4.71	22.18	3.594	35.2	" " " "
4.	48.69	48.35	5.85	4.53	20.52	3.421	32.2	" " " "
5.	53.70	53.32	6.115	4.82	23.23	3.546	35.5	" " " "
6.	49.29	48.94	5.86	4.53	20.52	3.464	32.6	" " " "
7.	53.46	53.09	6.03	4.67	21.81	3.644	35.4	" " " "
8.	50.90	50.54	5.94	4.60	21.16	3.522	33.7	" " " "
11.	47.96	47.62	5.83	4.53	20.52	3.370	31.7	" " " "

Chlorure de sodium.

Le sel pur fut préparé à l'aide du sel ordinaire suivant la méthode de M. Marguéritte (passage de gaz chlorhydrique dans une solution saturée de sel), puis dissous dans l'eau en proportions diverses. Le degré de concentration des solutions était déterminé en évaporant un volume connu dans un creuset au bain-marie, séchant (calcinant légèrement) le résidu et le pesant. Les expériences mentionnées sous A et B furent exécutées simultanément et se trouvèrent par conséquent dans des conditions entièrement semblables pendant toute leur durée.

A. 100 CC. de la solution contiennent 5.45 grammes NaCl, correspondant environ à NaCl. 58.1 H_2O.

Verre cyl.	rempli de	25 CC. étant étendus à 125, on trouve	le contenu du verre à diff. étant étendu jusqu'à 126.05 on trouve	durée de la diff.	resté dans la verre à diff.	hauteur de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k
3.	35.2	15 CC. =0.1635 gr.	15 CC. =0.1568 gr.	5j 3h	0.6869	13 mm.	5½°	0.7
4.	32.2	15 " =0.1635 "	15.05 " =0 1380 "	5j 2⅝h	0.6586	9 "	5½°	0.7

B. 100 CC. de la solution contiennent 26.3 grammes Na Cl, correspondant environ à Na Cl. 11 H_2O.

[v]erre cyl.	rem-pli de	25 CC. étant étendus à 260, on trouve	le contenu du verre à diff. étant étendu jusqu'à 260, on trouve	durée de la diff.	resté dans le verre à diff.	hauteur de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k.
6.	32.6	15 CC. =0.3793 gr.	15 CC. =0.3342 gr.	5j 2⅔h	0.6757	15 mm.	5½°	0.722
[1]1.	31.7	15 〃 =0 3793 〃	15 〃 =0.3203 〃	5j 3¼h	0.6660	13 〃	5½°	0.742

C. 100 CC. de la solution contiennent 3.22 grammes Na Cl, correspondant environ à Na Cl. 99.4 H_2O.

		25 CC. étant étendus à 125, on trouve	le contenu du verre à diff. étant étendu jusqu'à 125, on trouve					
5.	35.5	15 CC. =0.0965 gr.	15 CC. =0.0876 gr.	6j⅛h	0.6393	22 mm.	7°	0.782
6.	32.6	15 〃 =0.0965 〃	16 〃 =0.0811 〃	6j¼h	0.6042	16 〃	7°	0.769
7.	35.4	15 〃 =0.0965 r	15 〃 =0.0858 〃	5j23⅝h	0.6279	12 〃	7°	0.762
1.	31.7	15 〃 =0.0965 »	15 〃 =0.0749 〃	5j23⅝h	0.6121	18 〃	7°	0.753

D. 100 CC de la solution contiennent 3 grammes Na Cl, correspondant environ à Na Cl 106,7 H_2O. La concentration était déterminée par titrage avec une solution de nitrate d'argent (le chromate de potassium étant employé comme indicateur).

		250 CC. de sol. étant étendus jusqu'à 125, on avait sol. NaCl sol. $AgNO_3$	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 125, on avait sol. NaCl sol. $AgNO_3$					
	34.2	1 CC. = 1.019 CC	1 CC. = 0.972 CC.	4j 22h	0.6973	14 mm.	6°	0.750
	32.2	1 〃 = 1.019 »	1 〃 = 0.883 »	4j 22¼h	0.6728	12 〃	6°	0.757

E. 100 CC. de la solution employée contiennent 6.10 grammes Na Cl, correspondant environ à Na Cl. 51.5 H_2O.

		25 CC. de sol. étant étendus à 125, on trouve	le cont. du verre à diff. étant étendu à 125, on trouve					
2.	34.2	25 CC. =0.3052 gr.	25 CC. =0.2633 gr.	6j —	0.6306	11 mm.	5½°	0.725
1.	32.2	25 〃 =0.3052 〃	25 〃 =0.2409 〃	6j ½h	0.6128	11 〃	5 1/2°	0.748

F. 100 CC. de solution contiennent 12.53 grammes Na Cl, correspondant environ à Na Cl. 24.7 H_2O.

Verre cyl.	rempli de	25 CC. de sol. étant étendus à 125, on trouve	le cont. du verre à diff. étant étendu à 125, on trouve	durée de la diff.	resté dans le verre à diff.	haut. de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k.
5.	35.5	20 CC. = 0.5014 gr.	20 CC = 0.4998 gr.	5j 5h	0.7020	11 mm.	5½°	0.73[illegible]
6.	32.6	20 „ = 0.5014 „	20 „ = 0.4417 „	5j $5^{5}/_{12}$h	0.6756	20 „	5½°	0.707
7.	35.4	20 „ = 0.5014 „	20 „ = 0.4850 „	5j $5^{1}/_{6}$h	0.6831	13 „	5½°	0.733
11.	31.7	20 „ = 0.5014 „	20 „ = 0.4233 „	5j $4^{1}/_{6}$h	0.6658	8 „	5½°	0.737

G. 100 CC. de la solution employée contiennent 26.02 grammes Na Cl, correspondant environ à Na Cl. 11.1 H_2O.

		25 CC. de sol. étant etendus à 125, on trouve	le cont. du verre à diff. étant étendu à 125, on trouve					
2.	34.2	10 CC. = 0.5205 gr.	10 CC. = 0 4320 gr.	5j $23^{2}/_{3}$h	0.6067	15 mm.	8°	0.825
4.	32.2	10 „ = 0.5205 „	10 „ = 0.3899 „	5j —	0.5816	18 „	8°	0.823

Nitrate de soude.

Après avoir fait subir au sel quelques nouvelles cristallisations de l'eau bouillante, on en prépara deux solutions, très inégalement concentrées. La quantité de sel dissous fut déterminée en évaporant un volume connu du liquide au bain-marie, séchant le résidu au bain d'air et pesant. Toutes les expériences furent exécutées simultanément.

A. 100 CC. de la solution employée contiennent 10.35 grammes $NaNO_3$, correspondant environ à $NaNO_3$. 43.6 H_2O.

		25 CC. de sol. étant étendus à 220, on trouve	le cont. du verre à diff. étant étendu à 220, on trouve					
4.	32.2	15 CC. = 0.1764 gr.	15 CC. = 0.1521 gr.	6j 3h	0.6694	8 mm.	2½°	0.6[illegible]
6.	32.6	15 „ = 0.1764 „	15 „ = 0.1536 „	6j $2^{3}/_{4}$h	0.6677	10 „	2½°	0.[illegible]
11.	31.7	15 „ = 0.1764 „	15 » = 0.1484 „	6j $2^{1}/_{6}$h	0.6634	16 „	2½°	0.[illegible]

B. 100 CC. de la solution employée contiennent 49.09 grammes $NaNO^3$, correspondant environ à $NaNO_3$. 7.7 H_2O.

		25 CC. de sol. empl. étant étendus à 1 litre, on a	le cont. du verre à diff. étant étendu à 1 litre, on a					
2.	34.2	15 CC. = 0.1841 gr.	15 CC. = 0.1778 gr.	6j $2^{1}/_{4}$h	0.7060	6 mm.	2½°	0.5[illegible]
3.	35.2	15 „ = 0.1841 „	15 „ = 0.1873 „	6j 2h	0.7226	8 „	2½°	0.5[illegible]
8.	33.7	15 „ = 0.1841 „	15 „ = 0.1763 „	6j 2½h	0.7104	13 „	2½°	0.5[illegible]

Hyposulfite de soude.

Le sel ayant subi quelques nouvelles cristallisations dans l'eau, on en fit deux solutions, dont l'une contenait, en 100 CC, 5.6 gr. de sel cristallisé, l'autre 26.88 gr. La quantité de sel existant dans les solutions était déterminée par titrage avec une solution d'iode et d'amidon. Les expériences mentionnées sous A et B furent instituées simultanément, de sorte que, pendant tout leur cours, les verres à diffusion se trouvèrent soumis aux mêmes conditions de température, etc.

A. 100 CC. de la solution contenaient 5.6 grammes $Na_2S_2O_3$.5 aq., correspondant environ à $Na_2S_2O_3$. 5 aq. 240 H_2O.

[V]erre cyl.	rempli de	25 CC. étant étendus jusqu'à 200, on avait sol. d'J.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 200 CC, on avait sol. d'J.	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	haut. de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k.
1.	36.9	1 CC. = 0.661 CC.	1 CC. = 0.5028 CC.	9j 21 1/4 h	0.5154	10 mm.	10½°	0.636
6.	32.6	1 " = 0.661 "	1 " = 0.4208 "	9j 21h	0.4882	13 "	10½°	0.647
7.	35.4	1 " = 0.661 "	1 " = 0.511 "	9j 1h	0.5460	11 "	10½°	0.642
8.	33.7	1 " = 0.661 "	1 " = 0.4909 "	9j 1h	0.5509	5 "	10½°	0.614

B. 100 CC. de la solution contenaient 26.88 grammes $Na_2S_2O_3$. 5 aq., correspondant environ à $Na_2S_2O_3$ 5 aq. 43.7 H_2O.

		25 CC. étant étendus jusqu'à 1 litre, on avait sol. d'J.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 1 litre, on avait sol. d'J.					
3.	35.2	1 CC. = 0.6346 CC.	1 CC. = 0.549 CC.	8j 23½h	0.6144	14 mm.	10½°	0.539
4.	32.2	1 " = 0.6346 "	1 " = 0.4795 "	9j 1½h	0.5866	7 "	10½°	0.537
5.	35.5	1 " = 0.6346 "	1 " = 0.5667 "	9j —	0.6289	10 "	10½°	0.539
1.	31.7	1 " = 0.6346 "	1 " = 0.464 "	9j —	0.5766	15 "	10½°	0.556

Nitrate d'argent.

Du sel pur je préparai trois solutions, de concentration différente. Les expériences mentionnées en A, B et C eurent lieu

simultanément, et par conséquent dans les mêmes circonstances du commencement à la fin. Le sel dissous fut dosé ou bien à l'état de chlorure d'argent, ou bien par titrage avec une solution de chlorure de sodium (le chromate de potasse servant d'indicateur).

A. 100 CC. de la solution contiennent 4.96 grammes AgO^3, correspondant environ à $AgNO_3$. 189 H_2O.

Verre cyl.	rempli de	25 CC de sol. étant étendus jusqu'à 125, on a sol. de Na Cl	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 125, on a sol. de Na Cl	durée de la diff.	resté dans le verre à dff., en parties de la quantité employée	haut. de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k.
1.	36.9	1 CC. = 0.668 CC.	1 CC. = 0.677 CC.	4j 3h	0.6866	13 mm.	7½°	0.91
4.	32.2	1 " = 0.668 "	1 " = 0.580 "	4j 3½h	0.6741	13 "	7½°	0.895
8.	33.7	1 " = 0.668 "	1 " = 0.619 "	4j 2½h	0.6874	15 "	7½°	0.890

B. 100 CC. de la solution contiennent 35.97 grammes $AgNO^3$, correspondant environ à $AgNO_3$. 25 H_2O.

		25 CC de sol. étant étendus jusqu'à 260, on a sol. NaCl	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 260., on a sol. Na Cl					
2.	34.2	1 CC. = 1.132 CC.	1 CC. = 1.133 CC.	4j 6½h	0.7316	14 mm.	7½°	0.7
3.	35.2	1 " = 1.132 "	1 " = 1.156 "	4j 6½h	0.7253	9 "	7½°	0.7

C. 100. CC. de la solution contiennent 68.58 grammes $AgNO_3$, correspondant environ à $AgNO_3$. 11.8 H_2O.

		25 cc de sol. étant étendus jusqu'à 1 litre, on a Ag Cl.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 1 litre, on a Ag Cl.					
5.	35.5	15 CC. = 0.2171 gr.	15 CC. = 0.2432 gr.	4j 7½h	0.7889	9 mm.	7½°	0.6
7.	35.4	15 " = 0.2171 "	15 " = 0.2339 "	4j 7½h	0.7609	13 "	7½°	0.6

Urée.

Après cristallisation de l'alcool, l'urée fut dissoute dans l'eau; la solution en contenait 3.33 grammes pour 100 cc. La quantité

d'urée dissoute était déterminée en évaporant un volume connu de la solution au bain-marie et séchant le résidu à 100°, jusqu'à ce que son poids demeurât constant.

Verre cyl.	rempli de	26 CC étant étendus jusqu'à 220 cc, on avait	le cont du verre à diff. étant étendu jusqu'à 220, cc., on avait	durée de la diff.	resté dans le verre à diff., en parties de la quantité employée	haut. de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k.
4.	32.2	15.05 CC. =0.0592 gr.	15 CC. =0.0519 gr.	4j $\frac{1}{5}$h	0.7103	6 mm.	$7\frac{1}{2}$°	0.816
6.	32.6	15.05 " =0.0592 "	15 " =0.0528 "	4j —	0.7137	8 "	$7\frac{1}{2}$°	0.809
8.	33.7	15.05 " =0.0592 "	15 " =0.0550 "	4j $\frac{1}{5}$h	0.7192	6 "	$7\frac{1}{2}$°	0.815
1.	31.7	15.05 " =0.0592 "	15.5 " =0.0535 "	4j —	0.7197	8 "	$7\frac{1}{2}$°	0.791

Acides tartrique et racémique.

Ces deux acides furent purifiés par quelques cristallisations dans l'eau, puis on en fit des solutions à environ 5°/₀. Pour déterminer la quantité d'acide que la solution contenait, on titrait celle-ci par la soude, la phénolphtaléine faisant fonction d'indicateur. Les expériences mentionnées sous A et B eurent lieu simultanément.

A. Acide tartrique.

		24.95 CC. de sol. étant étendus jusqu'à 200 on avait NaOH	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 200 cc., on avait NaOH					
[illegible].	32.6	1 CC. = 0.617 CC.	1 CC. = 0.705 CC	4j $4\frac{5}{8}$h	0.8745	8 mm.	5°	0.367
[illegible].	33.7	1 " = 0.617 "	1 " = 0.727 "	4j $5\frac{1}{2}$h	0.8723	10 "	5°	0.381

B. Acide racémique.

		25 CC. de sol. étant étendus jusqu'à 200 cc, on avait NaOH	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 200 cc., on avait NaOH					
4.	32.2	1 CC. = 0.612 CC.	1 CC. = 0.619 CC.	4j $5\frac{2}{3}$h	0.8638	13 mm.	5°	0.338
1.	31.7	1 " = 0.650 " *)	1 " = 0.713 "	4j 5h	0.8651	10 "	5°	0.388

*) Ici, les 25 cc avaient été étendus jusqu'à 220 cc; la solution était donc un peu plus forte que celle du verre cilindrique n°. 4.

Sulfobenzoate de soude.

Ce sel fut soumis à une cristallisation de l'alcool bouillant. La solution employée en contenait 5,16 grammes dans 100 cc. La concentration des solutions était déterminée par l'évaporation d'un volume connu au bain-marie et par la dessiccation du résidu à 100°, jusqu'à ce qu'il accusât un poids constant.

Verre cyl.	rempli de	25 CC. de sol. étant étendus jusqu'à 220, on avait	le cont. du verre à diff étant étendu jusqu'à 220 cc, on avait	durée de la diff.	resté dans le verre à diff. en parties de la quantité employée	haut. de l'eau au dessus du verre à diff.	temp.	k.
1.	36.9	15 CC. = 0.0879 gr.	15 CC. = 0.0739 gr.	8j $4\frac{1}{4}$h	0.5696	9 mm.	$14\frac{1}{2}$°	0.661
5.	35.5	15 〃 = 0.0879 〃	15 〃 = 0.0714 〃	8j $4\frac{2}{3}$h	0.5720	11 〃	$14\frac{1}{2}$°	0.701
6.	32.6	15 » = 0.0879 〃	15 〃 = 0.0636 〃	7j $22\frac{2}{3}$h	0.5549	15 〃	$14\frac{1}{2}$°	0.670
11.	31.7	15 〃 = 0.0879 〃	15 〃 = 0.0624 〃	7j $23\frac{1}{3}$h	0.5598	10 〃	$14\frac{1}{2}$°	0.659

Formiate de soude.

Le sel employé avait subi plusieurs cristallisations dans l'eau. Pour la détermination de la proportion de sel contenue dans les solutions, un volume connu était évaporé avec de l'acide chlorhydrique au bain-marie, puis le résidu était séché et pesé.

A. 100 CC de la solution contenaient 2.47 grammes H COO Na.

		30 CC. de sol. étant étendus jusq'à 125, on avait	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 125 cc, on avait					
4.	32.2	15 CC. = 0.0765 gr.	15 CC. = 0.0436 gr.	8j $\frac{11}{12}$h	0.5310	6 mm.	8°	0.70[illegible]
11.	31.7	15 〃 = 0.0765 〃	15 〃 = 0.0445 〃	8j $\frac{5}{12}$h	0.5505	18 〃	8°	0.67[illegible]

B. 100 CC. de la solution employée contenaient 5.56 grammes H COO Na.

		25 CC. de sol. étant étendus jusqu'à 220, on avait Na Cl.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 220 cc, on avait Na Cl					
2.	34.2	15 CC. = 0.0816 gr.	15 CC. = 0.0671 gr.	6j $23\frac{1}{2}$h	0.6011	15 mm.	$9\frac{1}{2}$°	0.71[illegible]
4.	32.2	15 〃 = 0.0816 〃	15 » = 0.0605 〃	6j $23\frac{1}{6}$h	0.5756	16 〃	$9\frac{1}{2}$°	0.73[illegible]
7.	35.4	15 〃 = 0.0816 〃	15 〃 = 0.0725 〃	6j $4\frac{5}{12}$h	0.6275	20 〃	$9\frac{1}{2}$°	0.74[illegible]

Acide chlorhydrique.

Dans ces expériences, le remplissage des verres à diffusion fut exécuté d'une autre manière que dans les précédentes: une burette, dont la partie inférieure rétrécie avait été enlevée, fut fermée par un bouchon auquel était adapté un tube deux fois recourbé à angle droit (une fois vers le bas et une fois vers le haut) et muni d'un robinet en son milieu; la partie recourbée vers le bas était étirée en un long tube capillaire. Le verre à diffusion étant placé dans le vase à précipité, et celui-ci étant entièrement rempli d'eau, on abaissait avec précaution la burette de manière à amener l'extrémité de son tube capillaire sur le fond du verre à diffusion, puis, ouvrant le robinet, on laissait s'écouler doucement autant de solution chlorhydrique qu'il en fallait pour remplir le verre jusqu'aux $\frac{2}{3}$ de sa hauteur. Les expériences mentionnées sous A et B furent instituées simultanément. Dans celle dont les résultats sont communiqués en C, j'ai tâché de déterminer la constante de diffusion à 0°; à cet effet, les vases à précipité dans lesquels se trouvaient les verres à diffusion furent placés chacun dans un seau, puis l'espace intermédiaire fut rempli de neige. L'eau dans laquelle devait s'opérer la diffusion, de même que l'acide chlorhydrique à employer, avaient déjà été placés dans la neige vingt-quatre heures auparavant. Après que les verres à diffusion eurent reçu leur charge, les grands vases à précipité furent recouverts d'une plaque de verre, sur laquelle on plaça un autre vase rempli de neige, afin de les isoler autant que possible de l'espace ambiant plus chaud. Cela a mieux réussi dans l'expérience avec le verre 6 que dans celle avec le verre 4; le chiffre donné par la première mérite donc plus de confiance.

A. 100 CC. de la solution contenaient 4.55 gr. H Cl, correspondant environ à H Cl. 44 H_2O.

Verre cyl.	rempli de	30 CC. de la sol. étant étendus jusqu'à 200 cc, on avait K OH.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 200 cc, on avait K OH.	durée de la diff.	resté dans le verre à diff. en parties de la quantité employée	haut. de l'eau au-dessus du verre à diff.	temp.	k
2.	34.2	50 CC. = 27.10 CC	50 CC. = 19.4 CC.	2j 21h	0.6279	11 mm.	3½°	1.6[illegible]
7.	35.4	50 〃 = 27.10 〃	50 〃 = 19.9 〃	2j 21⅛h	0.6223	12 〃	3½°	1.6[illegible]
11.	31.7	50 〃 = 27.10 〃	50 〃 = 17.15 〃	2j 20½h	0.5989	12 〃	3½°	1.6[illegible]

B. 100 CC. de la solution contenaient 22.7 gr. H Cl, correspondant environ à H Cl. 8 H_2O.

		30 CC. étant étendus jusqu'à 1 litre, on avait K OH.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 1 litre, on avait K OH.					
5.	35.5	50 CC. = 17.6 CC.	50 CC. = 11.45 CC.	2j 23¼h	0.5498	14 mm.	3½°	2.061
6.	32.6	50 〃 = 17 6 〃	50 〃 = 9.9 〃	2j 23h	0.5176	10 〃	3½°	1.997
8.	33.7	50 〃 = 17.6 〃	50 〃 = 10.55 〃	2j 23⅛h	0.5336	13 〃	3½°	1.96[illegible]

C. 100 CC. de la solution contenaient 13.57 gr. H Cl, correspondant environ à H Cl. 14 H_2O.

		30 CC. étant étendus jusqu'à 200 cc, on avait K OH.	le cont. du verre à diff. étant étendu jusqu'à 200 cc, on avait K OH.					
4.	32.2	50 CC. = 27.95 CC.	50 CC. = 21.15 CC.	1j 22⅔h	0.7050	9 mm.	0°	1.7[illegible]
6.	32.6	50 〃 = 27.95 〃	50 〃 = 21.85 〃	1j 22 7/12 h	0.7194	6 〃	0°	1.6[illegible]

Les recherches dont je viens de rendre compte ont été entreprises, d'une part pour déterminer la constante de diffusion propre aux corps sur lesquels elles portent, d'autre part pour rechercher, en employant des solutions très inégalement concentrées, l'influence que pouvait exercer, sur la valeur de cette constante, le degré de concentration du liquide.

Graham [1]) a déjà exécuté, en 1850, de nombreuses expériences sur l'influence de la concentration. Il prenait différents petits

[1]) *Philos. Transact.*, 1850, p. 805.

flacons de verre, tous semblables entre eux, les remplissait jusqu'au col de la solution du sel à étudier, les plaçait chacun dans un vase de verre plus grand, et remplissait doucement celui-ci, de même que le col du flacon, de l'eau dans laquelle devait se faire la diffusion. Au bout de quelque temps, il déterminait la quantité de sel qui était passée du flacon dans l'eau ambiante. Evidemment il faut alors, si les coefficients de diffusion sont indépendants de la concentration des solutions, que les quantités diffusées en un même temps soient proportionnelles à la concentration des solutions employées. Les expériences de Graham ont porté sur des solutions à 1, 2, 4 et 8°/₀, c'est-à-dire sur des solutions contenant 1, 2, 4 ou 8 parties en poids de la matière dans 100 parties en volume de la solution. J'ai réuni dans le tableau suivant les résultats qu'il a obtenus. Les chiffres expriment les rapports des différentes quantités diffusées, la quantité diffusée par la solution à 2 °/₀ étant prise = 2.

Concentr. de la solution.	HCl.	HNO_3.	H_2SO_4.	$C_2H_4O_2$.	H_2SO_3.	NH_3.	$Ba(NO_3)_2$.	$Ca(NO_3)_2$.	$BaCl_2$.	$SrCl_2$.	$CaCl_2$.
1	0.97	0.95	1.03	—	0.954	1.029	1.026	1.021	1.047	1.045	1.032
2	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4	4.08	3.90	4.01	3.83	3.891	4.117	3.936	3.872	3.97	4.041	4.01
8	9.00	7.86	8.16	7.26	7.827	8.605	7.247	7.334	7.608	7.626	8.021

Concentr. de la solution.	$AgNO_3$.	$NaNO_3$.	$NaCl$.	KCl.	$Al_2(SO_4)_3$.	$KHCO_3$.	$NH_4.HCO_3$.	$NaHCO_3$.	$MgSO_4$.	$ZnSO_4$.
1	—	—	1.023	1.005	1.074	1.029	1.013	1.059	1.144	1.091
2	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4	3.87	3.82	4.036	3.895	3.780	3.806	3.959	3.869	3.671	3.784
8	7.62	7.73	7.832	8.054	6.572	7.408	7.346	7.590	6.701	6.916
8	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1.—	1.—
16	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1.759	1.878
24	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	2.340	2.560

Les résultats auxquels M. Schuhmeister [1]) est arrivé, en ce qui concerne la concentration, sont les suivants

Concentr. de la solution.	K Cl.	K Br.	KJ.	Na Cl.	Na J.	Li Br.
0.1	k = 1.10	1.13	1.12	0.84	—	—
0.15	—	—	—	—	0.8	—
0.2	—	—	—	—	—	0.8
0.30	k = 1.27	1.24	1.25	0.92	0.9	—
0.38	—	—	—	—	—	0.9
0.9	—	—	1.45	—	—	—

M. Weber [2]), enfin, a trouvé que pour le sulfate de zinc l'influence de la concentration sur la valeur de la constante de diffusion est donnée par:

conc. = 21,4 gr. $ZnSO_4$ dans 100 cc de sol.; temp. 17°,9; k = 0,2403
″ = 31,8 ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ; ″ 18° ; k = 0,2289.

Quant aux valeurs trouvées par moi, elles sont réunies dans le tableau suivant:

Température.	3½°.	5½°.	2½°.	7½°.	10½°.
Concentr. de la sol.	H Cl.	Na Cl.	$NaNO_3$.	$AgNO_3$.	$Na_2S_2O_3$.
4.55	1.622				
4.96				0.899	
5.45		0.756			
5.6					0.635
6.1		0.736			
10.35			0.622		
12.53		0.727			
22.7	2.008				
26.3		0.732			
26.88					0.543
35.97				0.774	
49.09			0.565		
68.58				0.649	

[1]) *Wiener Akad. Ber.*, t. LXXIX, p. 603.
[2]) *Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft*, nov. 1878: voir aussi Wiedemann's *Annalen*, t. VII, p. 550.

De la comparaison de ces valeurs il ressort que, pour l'acide chlorhydrique, la constante de diffusion augmente fortement avec la concentration de la solution, ainsi que Graham l'avait déjà constaté sur des solutions contenant de 1 à 8°/$_0$ d'acide. Ce résultat est en parfait accord avec celui obtenu dans la première partie de mes recherches. Les expériences n°. 10, 11, 12 et 13 pour l'acide chlorhydrique [1]) avaient alors eu lieu simultanément, à la température de $8\frac{1}{2}°$; dans le verre O, la concentration de l'acide employé était 2,51 fois plus forte que dans les verres H, F et G. Ces derniers contenaient une solution d'acide chlorhydrique à environ 8°/$_0$, le verre O, une solution à environ 20°/$_0$; or, la moyenne des valeurs données par H, F et G est $k = 2{,}08$, tandis que la valeur fournie par O est $k = 2.45$. — Une autre confirmation résulte du fait que je trouve ci (exp. C, p. 352) pour le coefficient de diffusion de l'acide chlorhydrique à 0° la valeur $k = 1.633$, tandis que mes expériences antérieures donnent par le calcul $k_0 = 1{,}35$. Ce chiffre a été déduit de $k_8 = 2{,}07$ et $k_{15,5} = 2{,}57$, valeurs obtenues pour une solution à environ 8°/$_0$ HCl. Or, dans les expériences mentionnées ci-dessus en C, la solution était plus concentrée, et parconséquent la valeur à trouver devait être plus forte que celle qui vient d'être calculée [2]).

Pour le chlorure de sodium, la concentration ne paraît avoir que peu d'influence sur la vitesse de diffusion. M. Schuhmeister

---

[1])

Verre O	1	CC.	d'acide	= 5.30	CC.	KOH	$8\frac{1}{2}°$ k = 2.45	
" H	1	"	"	= 2.11	"	"	$8\frac{1}{2}°$ k = 2.14	moyenne k = 2.08
" F	1	"	"	= 2.11	"	"	$8\frac{1}{2}°$ k = 2.03	
" G	1	"	"	= 2.11	"	"	$8\frac{1}{2}°$ k = 2.07	

[2]) Les résultats obtenus pour l'acide chlorhydrique sont donc:

Verre H.F.G...	concentr.	environ	HCl.	22	H_2O	à $8\frac{1}{2}°$	k = 2.08
" O.......	"	"	"	7.5	"	" $8\frac{1}{2}°$	k = 2.45
" 5, 6, 8. (B)	"	près de	"	8	"	" $3\frac{1}{2}°$	k = 2.008
" 2, 7, 11. (A)	"	"	"	44	"	" $3\frac{1}{2}°$	k = 1.622
" 6. (C)	"	"	"	14	"	" 0°	k = 1.633
	"	environ	"	22	"	" 0°	k = 1.35 (calc.)

déduit de ses expériences que le coefficient de diffusion de cette substance croît avec le degré de concentration. Les expériences de Graham accusent aussi une très légère différence dans ce coefficient, suivant que la solution est plus ou moins concentrée. De la comparaison des solutions à 2 et à 4°/₀ ressortirait un accroissement de la valeur de k, de celle des solutions à 2 et à 8°/₀, un décroissement. En ce qui concerne le chlorure de potassium, les valeurs trouvées par Graham conduiraient, pour les solutions à 2 et 4°/₀, à une diminution de k, pour les solutions à 2 et 8°/₀, à une augmentation. Ni pour K Cl, ni pour Na Cl, nous ne trouvons donc chez Graham l'accroissement du coefficient de diffusion avec la concentration, observé par M. Schuhmeister.

Chez le nitrate de soude, mais surtout chez le nitrate d'argent et l'hyposulfite de soude, l'influence de la concentration est plus prononcée. Chez ces trois sels, la vitesse de diffusion devient moindre quand la concentration augmente. A cet égard, mes expériences sont encore d'accord avec celles de Graham. Il énonce que, pour l'acide chlorhydrique et l'acide nitrique, les quantités qui diffusent d'une solution à 1 ou à 2°/₀ — dans le même temps et à la même température — sont sensiblement égales, mais que cela n'est plus le cas pour une solution à 4°/₀, et encore moins pour une solution à 8°/₀; dans cette dernière, la diffusion de l'acide chlorhydrique est devenue beaucoup plus grande. La comparaison des solutions de chlorure de calcium et de nitrate de calcium lui apprend aussi que, de même que pour l'acide chlorhydrique et l'acide nitrique, les quantités relatives des sels diffusés changent quand la concentration de la solution augmente: la quantité du nitrate devient plus faible, tandis que le chlorure conserve le même pouvoir diffusif que dans les solutions étendues. Les valeurs obtenues par Graham pour les nitrates de Ba, Ca, Ag et Na indiquent également, comme on peut le voir dans le tableau, une diminution non équivoque.

Pareillement pour le sulfate de zinc, Graham et, après lui,

M. Weber trouvent qu'à un accroissement de la concentration correspond un décroissement de la constante de diffusion.

La seule substance chez laquelle on ait constaté d'une manière certaine l'augmentation de la constante de diffusion avec la concentration de la solution est donc jusqu'ici l'acide chlorhydrique, auquel, d'après les expériences de Graham, il faudrait joindre l'acide sulfurique; pour tous les sels examinés sous ce rapport, il paraît y avoir, à mesure que la concentration s'élève, diminution de la constante de diffusion, diminution ou bien très faible (comme pour le chlorure de sodium et peut-être aussi pour d'autres chlorures), ou bien (comme pour les nitrates) assez notable.

Les différences qu'ont offertes les valeurs de k, déterminées pour une même matière, mais dans des liquides inégalement concentrés, sont très probablement dues à des changements moléculaires, qui se sont produits lors de la dissolution des matières solides et de la dilution ultérieure de ces solutions; pour les sels solides, ces changements doivent consister en ce que, par l'effet des dilutions successives, les agrégats de molécules se décomposent chaque fois davantage et se scindent en groupes moléculaires plus petits. A ce point de vue, je me propose d'étudier d'une manière très détaillée l'influence de la concentration sur la constante de diffusion chez quelques combinaisons, telles que le sulfate de magnésie, le nitrate de soude, le nitrate d'argent, etc.

VEENDAM, avril 1883.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE

DES

RÉSIDUS CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES,

PAR

T. J. STIELTJES Jr.

Le théorème fondamental de la théorie des résidus quadratiques, la loi dite de réciprocité, est relatif au rapport réciproque de deux nombres premiers *impairs*, et dans une théorie complète le caractère du nombre 2, comme résidu ou non-résidu quadratique d'un autre nombre premier impair, doit donc être déterminé séparément. Il ressort de là que le nombre 2 occupe une place à part parmi tous les nombres premiers.

Les théorèmes par lesquels est déterminé le caractère de 2 ont été énoncés pour la première fois par Fermat [1]) et démontrés par Lagrange [2]). Il convient de remarquer, toutefois, que la démonstration de Lagrange s'appuie sur des considérations tout à fait semblables à celles par lesquelles, antérieurement, Euler [3]) avait démontré les théorèmes, également énoncés par Fermat, qui fixent le caractère de 3 comme résidu ou non-résidu quadratique. L'insuccès d'Euler dans tous ses efforts pour démontrer les théorèmes concernant le caractère de 2 (Voir *Disq. Arithm.* Art. 120) est donc d'autant plus surprenant.

---

[1]) *Op. Mathem.*, p. 168.

[2]) *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin*, 1775. *Oeuvres*, t. III, p. 759.

[3]) *Comment. nov. Petrop.*, t. VIII, p. 105.

Un phénomène entièrement analogue se présente dans la théorie des résidus biquadratiques. Ici également, la loi générale de réciprocité a rapport à deux nombres premiers *impairs*, c'est-à-dire, non divisibles par $1 + i$, et le caractère de ce nombre premier particulier doit être déterminé séparément.

Dans le Mémoire de Gauss : *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda*, où les nombres complexes entiers de la forme $a + bi$ furent introduits pour la première fois dans la théorie des nombres, le caractère biquadratique de $1 + i$ est déterminé complètement. La démonstration y est de nature purement arithmétique et s'appuie essentiellement sur le théorème de l'Art. 71, théorème analogue au lemme formant la base tant de la troisième que de la cinquième démonstration de Gauss pour la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques (*Theorematis arithmetici demonstratio nova*, *Werke*, II, p. 1, et *Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae*, *Werke*, II, p. 47).

Comme on le sait, le troisième Mémoire, dans lequel Gauss s'était proposé de donner la démonstration de la loi générale de réciprocité, déjà énoncée dans son second Mémoire sur cette théorie, n'a jamais paru.

Les deux premières démonstrations publiées de ce théorème fondamental sont celles d'Eisenstein, dans le tome XXVIII du *Journal für Mathematik* de Crelle, p. 53 et 223. Dans le premier article: *Lois de réciprocité*, il n'a pas traité du caractère de $1 + i$, mais bien dans le second article: *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste*. Eisenstein fait usage, dans l'établissement du caractère de $1 + i$, de la loi générale de réciprocité démontrée antérieurement, ce qui en tout cas paraît peu élégant, vu que le passage du simple au composé demande nécessairement que le caractère de $1 + i$ soit déduit d'une façon entièrement indépendante du théorème fondamental.

La même remarque est plus ou moins applicable à toutes les autres méthodes qui ont été employées postérieurement pour

traiter la théorie des résidus biquadratiques; la marche suivie par Gauss pour démontrer le caractère de $1+i$ est, à mon avis, la seule qui puisse être dite purement arithmétique et complètement indépendante de la loi générale de réciprocité, de sorte qu'elle satisfait, sous ce rapport, aux conditions qui devront être imposées à tout développement méthodique de la théorie des résidus biquadratiques, prise dans son ensemble.

Des remarques tout à fait analogues peuvent être faites au sujet de la théorie des résidus cubiques. La première démonstration de la loi de réciprocité dans cette théorie — loi énoncée par Jacobi — est celle d'Eisenstein, publiée dans le tome XXVII du *Journal für Mathematik* de Crelle, p. 289. La détermination particulière du caractère de $1-\varrho$ — (où ϱ — est une racine cubique complexe de l'unité) n'a été donnée par Eisenstein que plus tard, dans le tome XXVIII, p. 28 et suiv., du même journal. Pour cette détermination il fait encore usage de la loi générale de réciprocité, et je ne sache pas qu'on ait donné jusqu'ici un mode de déduction du caractère cubique de $1-\varrho$ dont la même chose ne puisse être dite.

Comme il est à désirer, toutefois, qu'on possède une démonstration du caractère de $1+i$ et de $1-\varrho$ entièrement indépendante de la loi générale de réciprocité, il y aura peut-être quelque intérêt à faire voir comment tous ces théorèmes relatifs aux nombres premiers 2, $1+i$ et $1+\varrho$, théorèmes nécessaires pour compléter les lois de réciprocité, peuvent être démontrés suivant une *méthode uniforme*.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer le nombre premier, dont il s'agit de déterminer le caractère, par un produit congruent de facteurs. On détermine alors le caractère de ces facteurs par des considérations tout à fait analogues à celles dont Gauss s'est servi dans les Art. 15—20 de son *premier* Mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques (*Werke*, t. II, p. 78—87). Gauss n'y a en vue que les nombres réels, et l'objet de son Mémoire est la détermination du caractère de 2 dans la théorie réelle. Mais j'ai reconnu que tous les raisonnements

de Gauss se laissent reproduire aussi, presque sans changement, dans la théorie des nombres complexes, et la détermination du caractère biquadratique de $1 + i$ s'obtient alors immédiatement au moyen d'une considération très simple, suivant laquelle $1 + i$ est congruent avec un produit dont on connaît le caractère des facteurs.

A l'aide de ces remarques extrêmement simples, et étant données les recherches du premier Mémoire de Gauss, la détermination du caractère de $1 + i$ par rapport à un nombre premier de la forme $a + bi$ (où b n'est pas égal à zéro) n'offre plus aucune difficulté; une méthode entièrement analogue peut d'ailleurs être employée dans le cas où le module est un nombre premier réel de la forme $4n + 3$. Bien que ce dernier cas permette une démonstration beaucoup plus simple (voir, par ex. Gauss, II, Art. 68), j'ai cru devoir le traiter de la même manière que les autres cas, pour faire ressortir que la méthode en question suffit à établir l'ensemble des théorèmes.

Après avoir effectué la détermination du caractère biquadratique de $1 + i$, je démontre, à l'aide des développements antérieurs, tous les théorèmes que Gauss a trouvés par induction et énoncés dans l'Art. 28 de la *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda*. Si je ne me trompe, cette démonstration est donnée ici pour la première fois [1]). Elle est entièrement fondée sur la théorie des nombres complexes, théorie qui joue donc ici un rôle purement auxiliaire, les théorèmes eux-mêmes ayant seulement rapport à des nombres réels. Outre la loi de réciprocité dans la théorie des résidus biquadratiques, la démonstration complète exigeait encore les considérations des Art. 19—21.

Je vais maintenant commencer par déduire le caractère de 2 dans la théorie des

---

[1]) *Une partie* de ces théorèmes a été démontrée par M. Lebesgue, dans le *Journal* de Liouville, t. IV, p. 51, 52, remarque 1°.

Résidus quadratiques.

1. Soit p un nombre premier impair, les nombres

$$1, \ 2, \ 3, \ , \dots \ p-1$$

seront alors divisés en deux groupes. Dans le premier groupe

$$A \qquad \alpha \ \alpha' \ \alpha'' \dots .$$

sont rapportés tous les résidus quadratiques, dans le second groupe

$$B \qquad \beta \ \beta' \ \beta'' \dots .$$

tous les non-résidus, pour le module p. Chacun des groupes A et B se compose de $\frac{p-1}{2}$ nombres incongrus par rapport au module p, et il est facile de voir que les deux congruences:

$$(x-\alpha)\ (x-\alpha')\ (x-\alpha'') \dots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \text{ mod.} p.$$

$$(x-\beta)\ (x-\beta')\ (x-\beta'') \dots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

sont des congruences identiques; car elles sont de degré moins élevé que la $\frac{p-1}{2}^{\text{ième}}$ et toutes les deux possèdent manifestement $\frac{p-1}{2}$ racines, à savoir, la première, les racines $x=\alpha$, $x=\alpha'$, $x=\alpha''$.., la seconde, les racines $x=\beta$, $x=\beta'$, $x=\beta''$...

En ajoutant l'unité aux nombres de A et B, on obtient les groupes de nombres suivants:

$$A' \qquad \alpha+1, \ \alpha'+1, \ \alpha''+1 \dots$$
$$B' \qquad \beta+1, \ \beta'+1, \ \beta''+1 \dots$$

Le nombre des nombres du groupe A' qui font partie de A et de B sera désigné respectivement par (0.0), (0.1), et le nombre des nombres de B' qui entrent dans A et B respectivement par (1.0), (1.1).

Ces quatre nombres peuvent être réunis dans le tableau S suivant :

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) \\ (1.0) & (1.1). \end{matrix}$$

Comme les nombres premiers des formes $p = 4n + 1$ et $p = 4n + 3$ se comportent d'une manière différente, ces deux cas doivent être traités séparément. Commençons par le premier.

---

2. Pour $p = 4n + 1$, -1 est résidu quadratique, de sorte que les nombres α et $p - \alpha$ entrent simultanément dans A. De même, les nombres β et $p - \beta$ entrent simultanément dans B.

Or (0.0) est évidemment égal au nombre de solutions de la congruence

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \mod. p,$$

où α et α' doivent être choisis dans le groupe A; et comme on a $\alpha' = p - \alpha''$, on peut dire aussi que (0.0) représente le nombre de solutions de la congruence

$$\alpha + \alpha'' + 1 \equiv 0 \mod. p.$$

En raisonnant de la même manière par rapport aux nombres (0.1), (1.0), (1.1), on reconnaît que le

signe	représente le nombre des solutions de
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$ le tout mod. p.

Il en ressort immédiatement

$$(0.1) = (1.0);$$

une seconde relation entre les nombres du schéma S est fournie par la considération suivante. A chaque nombre β du groupe B correspond, dans ce même groupe, un nombre déterminé unique β'', tel qu'on a:

$$\beta\beta'' \equiv 1 \text{ mod. } p,$$

et, en outre, $\beta'\beta''$ est alors congru avec un nombre α du groupe A. La multiplication de la congruence

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

par β'' donne donc

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0,$$

et en multipliant cette dernière congruence par β on retrouve la première. De là se déduit immédiatement $(1.1) = (0.1)$, de sorte que le schéma S a la forme:

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j. \end{matrix}$$

Or, dans le groupe A se trouve le nombre $p-1$, et par conséquent dans A' le nombre p, qui n'entre ni dans A ni dans B. Mais tous les autres nombres de A' et B' font partie soit de A, soit de B.

Il en résulte

$$h + j = \frac{p-1}{2} - 1$$

$$2j = \frac{p-1}{2},$$

donc

$$h = \frac{p-5}{4} \qquad j = \frac{p-1}{4}.$$

La congruence identique

$$(x - \beta)(x - \beta')(x - \beta'') \ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \text{ mod. } p$$

donne maintenant pour $x = -1$, puisque $\frac{p-1}{2}$ est pair:

$$(\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1) \ldots \equiv 2 \text{ mod. } p.$$

Le nombre des non-résidus parmi les nombres $\beta + 1$, $\beta' + 1$, $\beta'' + 1$ .. est $(1.1) = j = \frac{p-1}{4}$.

Si donc j est *pair*, ou

$$p = 8n + 1,$$

2 est résidu quadratique de p.

Si, au contraire, j est *impair*, ou

$$p = 8n + 5,$$

2 est non-résidu de p.

---

3. Pour $p = 4n + 3$, -1 est non-résidu, et le groupe B est identique au groupe des nombres $p-\alpha$, $p-\alpha'$, $p-\alpha''$ ...

Le signe (0.0) représente alors le nombre des solutions de la congruence $\alpha + 1 \equiv \alpha'$ mod. p. ou aussi, puisque $\alpha' = p - \beta$, le nombre des solutions de $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$.

On voit ainsi qne le

signe	représente le nombre des solutions de
(0.0)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0 \mod. p$,

de sorte que $(0.0) = (1.1)$. Si, en outre, on a de nouveau $\beta\beta'' \equiv 1$, $\beta'\beta'' \equiv \alpha$, la congruence $\beta + \beta' + 1 \equiv 0$, étant multipliée par β'', donne

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0,$$

d'où résulte, d'une manière analogue à celle indiquée dans le cas précédent, la relation $(1.0) = (0.0)$. Le schéma S a donc pour $p = 4n + 3$ la forme

$$\begin{matrix} h & j \\ h & h. \end{matrix}$$

Comme le nombre $p - 1$ entre dans le groupe B, et par conséquent p dans B', mais que d'ailleurs tous les autres nombres de A' et B' entrent soit dans A, soit dans B, on trouve

$$h + j = \frac{p-1}{2}$$

$$2h = \frac{p-1}{2} - 1, \text{ donc}$$

$$h = \frac{p-3}{4} \quad j = \frac{p+1}{2}.$$

De la congruence identique

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \mod. p$$

il résulte pour $x = -1$, vu que $\frac{p-1}{2}$ est impair,

$$(\alpha + 1)\ (\alpha' + 1)\ (\alpha'' + 1)\,.. \equiv 2 \text{ mod. } p\,,$$

et le nombre des non-résidus, parmi les nombres $\alpha + 1, \alpha' + 1$, $\alpha'' + 1$.., est $= j = \frac{p+1}{4}$.

Si l'on a donc j *pair*, ou

$$p = 8n + 7,$$

2 est résidu quadratique de p.

Si, au contraire, j est *impair* ou

$$p = 8n + 3,$$

2 est non-résidu de p.

Ayant ainsi déterminé le caractère de 2 comme résidu quadratique ou non-résidu, par rapport à un nombre premier impair quelconque, je vais établir le théorème correspondant dans la théorie des

Résidus biquadratiques.

4. Le nombre premier impair (c'est-à-dire non divisible par $1+i$) $m = a + bi$ sera toujours supposé *primaire*, ce mot étant pris dans l'acception qui lui est donnée par Gauss, de sorte que $a - 1$ et b, suivant le module 4, soient ou bien tous les deux $\equiv 0$, ou bien tous les deux $\equiv 2$.

On sait que, dans la théorie des nombres complexes entiers de la forme $a + bi$, les nombres premiers se composent:

premièrement, des nombres premiers réels q de la forme $4n + 3$, nombres qui doivent être pris négativement pour être impairs;

secondement, des facteurs premiers complexes des nombres premiers réels de la forme $4n + 1$. Ces nombres premiers com-

plexes sont de la forme $a + bi$, où b n'est pas égal à zéro, et deviennent primaires lorsqu'on les multiplie par l'une des quatres unités 1, i, -1, $-i$, convenablement choisie. Ils peuvent à leur tour être distingués en deux espèces, suivant que, lorsque $a + bi$ est primaire, $a - 1$ et b sont tous les deux divisibles par 4, ou tous les deux le double d'un nombre impair.

D'après cela, je partage les nombres premiers primaires en ces trois classes:

I. Les nombres premiers réels q de la forme $4r + 3$, pris négativement.
II. Les nombres premiers complexes de la forme $4r + 1 + 4si$.
III. Les nombres premiers complexes de la forme $4r+3+(4s+2)i$.

Le nombre premier (dans la théorie complexe) sera toujours désigné ici par M, la norme de M, par μ. En outre, p représentera toujours un nombre premier réel (positif) de la forme $4r + 1$, q un nombre premier réel (positif) de la forme $4r + 3$. Pour les nombres premiers de la première espèce, on a donc $M = -q$, $\mu = q^2$, pour ceux de la deuxième et de la troisième espèce, $\mu = p$.

Je remarquerai encore que pour les deux espèces I et II la norme μ est de la forme $8r + 1$, et pour III de la forme $8r + 5$. Cette circonstance fait que les deux premières espèces de nombres premiers peuvent, jusqu'à un certain point, être traités conjointement.

Les considérations de l'article suivant, 5, s'appliquent encore, à titre égal, aux trois classes de nombres premiers.

---

5. Soient donc M le nombre premier, μ la norme. Un système complet de nombres incongrus et non divisibles par le module se compose de $\mu - 1$ nombres, qui, suivant leur caractère

biquadratique par rapport à M, peuvent être distribués en quatre classes, comprenant chacune $\frac{\mu - 1}{4}$ nombres:

A	α,	α',	α'' . .
B	β,	β',	β'' . .
C	γ,	γ',	γ'' . .
D	δ,	δ',	δ'' . .

Dans la première classe A sont rangés tous les nombres α, α', α'' à caractère biquadratique 0, dans les groupes B, C, D les nombres à caractère biquadratique 1, 2, 3.

Disons encore, par surcroît, que le caractère biquadratique est pris ici dans le sens adopté par Gauss, de sorte que les nombres des quatre classes sont caractérisés par les congruences:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1,\ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \text{ mod. } M.$$

Pour plus de commodité, je me servirai toutefois aussi du symbole introduit par Jacobi, et pourrai donc écrire:

$$\left(\left(\frac{\alpha}{M}\right)\right) = 1,\ \left(\left(\frac{\beta}{M}\right)\right) = i,\ \left(\left(\frac{\gamma}{M}\right)\right) = -1,\ \left(\left(\frac{\delta}{M}\right)\right) = -i.$$

Notons enfin, une fois pour toutes, que dans la suite toutes les congruences auront rapport au module premier M, tant qu'un autre module ne sera pas expressément indiqué.

Je donne ici un exemple de la distribution des résidus mod. M, à l'exception du résidu 0, dans les quatre classes A, B, C, D, pour chacune des trois espèces de nombre premiers qui ont été distinguées dans le paragraphe 4.

$$M = -7 \qquad \mu = 49$$

A 1 , $3i$, -2, i, -3, $-2i$, -1, $-3i$, 2, $-i$, 3, $2i$.

B $1-2i$, $-1+3i$, $-2-3i$, $2+i$, $-3-i$, $3-2i$, $-1+2i$, $1-3i$, $2+3i$, $-2-i$, $3+i$, $-3+2i$.

C $-3+3i,\ -2-2i,\ -1+i,\ -3-3i,\ 2-2i,\ -1-i,$
$3-3i,\ 2+2i,\ 1-i,\ 3+3i,\ -2+2i,\ 1+i.$

D $3+2i,\ 1+2i,\ 1+3i,\ -2+3i,\ -2+i,\ -3+i,$
$-3-2i,\ -1+2i,\ -1-3i,\ 2-3i,\ 2-i,\ 3-i.$

$$M = -3-8i \qquad \mu = 73$$

A $1,\ 3+2i,\ -1-4i,\ -3i,\ 1+2i,\ -4,\ -1-3i,$
$-2,\ -3+4i,\ -1,\ -3-2i,\ 1+4i,\ 3i,\ -1-2i,$
$4,\ 1+3i,\ 2,\ 3-4i.$

B $1-2i,\ -1-i,\ 2+3i,\ 5+2i,\ -3+3i,\ 1-3i,\ 1-4i,$
$-2+4i,\ 2+2i,\ -1+2i,\ 1+i,\ -2-3i,\ -5-2i,$
$3-3i,\ -1+3i,\ -1+4i,\ 2-4i,\ -2-2i.$

C $4i,\ -3+i,\ 2i,\ 4+3i,\ i,\ -2+3i,\ 4-i,\ 3,\ -2+i,\ -4i,$
$3-i,\ -2i,\ -4-3i,\ -i,\ 2-3i,\ -4+i,\ -3,\ 2-i.$

D $-3-i,\ -4-i,\ 4+2i,\ 2-2i,\ 2+i,\ 1-i,\ -3+2i,$
$-2+5i,\ -3-3i,\ 3+i,\ 4+i,\ -4-2i,\ -2+2i,$
$-2-i,\ -1+i,\ 3-2i,\ 2-5i,\ 3+3i.$

$$M = -5+6i \qquad \mu = 61$$

A $1,\ -4,\ -1-4i,\ -3,\ 1+i,\ 2+i,\ -2+i,\ 3+2i,$
$2i,\ 1+3i,\ -3-i,\ -5,\ -2+2i,\ 3-2i,\ 4+i.$

B $1-i,\ 1-2i,\ 1+2i,\ 2-3i,\ 2,\ 3-i,\ -1+3i,\ 5i,$
$2+2i,\ -2-3i,\ 1-4i,\ -i,\ 4i,\ -4+i,\ 3i.$

C $-2i,\ -1-3i,\ 3+i,\ 5,\ 2-2i,\ -3+2i,\ -4-i,$
$-1,\ 4,\ 1+4i,\ 3,\ -1-i,\ -2-i,\ 2-i,\ -3-2i.$

D $-2-2i,\ 2+3i,\ -1+4i,\ i,\ -4i,\ 4-i,\ -3i,\ -1+i,$
$-1+2i,\ -1-2i,\ -2+3i,\ -2,\ -3+i,\ 1-3i,\ -5i.$

De même que dans le paragraphe 1, on se convainc immédiatement de l'identité des congruences suivantes:

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}-1 \text{ mod. } M.$$

$$(x-\beta)\,(x-\beta')\,(x-\beta'')\,.\,. \quad \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}-i$$
$$(x-\gamma)\,(x-\gamma')\,(x-\gamma'')\,.\,. \quad \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+1$$
$$(x-\delta)\,(x-\delta')\,(x-\delta'')\,.\,. \quad \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+i$$

d'où il suit pour $x=-1$, en distinguant les cas $\mu=8n+1$ et $\mu=8n+5$:

$$\mu=8n+1 \quad (\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\,.\,. \equiv 1-i \text{ mod. } M.$$
$$(\gamma+1)(\gamma'+1)(\gamma''+1)\,.\,. \equiv 2$$
$$(\delta+1)(\delta'+1)(\delta''+1)\,.\,. \equiv 1+i$$
$$\mu=8n+5 \quad (\alpha+1)(\alpha'+1)(\alpha''+1)\,.\,. \equiv 2 \quad \text{mod. } M.$$
$$(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\,.\,. \equiv 1+i$$
$$(\delta+1)(\delta'+1)(\delta''+1)\,.\,. \equiv 1-i$$

---

6. Considérons maintenant les nouveaux groupes de nombres A', B', C' et D' qui résultent de l'addition de l'unité aux nombres de A, B, C et D:

$$\begin{array}{ll} A' & \alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1\ .\ . \\ B' & \beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1\ .\ . \\ C' & \gamma+1,\ \gamma'+1,\ \gamma''+1\ .\ . \\ D' & \delta+1,\ \delta'+1,\ \delta''+1\ .\ ; \end{array}$$

désignons le nombre des nombres de A' qui sont congrus avec des nombres de A, B, C, D respectivement par

(0.0), (0.1), (0.2), (0.3);

et le nombre des nombres de B' qui sont congrus avec des nombres de A, B, C, D respectivement par

(1.0), (1.1), (1.2), (1.3).

De même, les nombres

(2.0), (2.1), (2.2), (2.3) auront rapport au groupe C', et (3.0), (3.1), (3.2), (3.3) au groupe D'.

Ces 16 nombres (0.0), (0.1) etc. peuvent être tous réunis dans le tableau quadratique S suivant:

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) & (0.2) & (0.3) \\ (1.0) & (1.1) & (1.2) & (1.3) \\ (2.0) & (2.1) & (2.2) & (2.3) \\ (3.0) & (3.1) & (3.2) & (3.3), \end{matrix}$$

et pour les exemples donnés dans le paragraphe 5, j'obtiens

	$M = -7$ $\mu = 49$				$M = -3 - 8i$ $\mu = 73$				$M = -5 + 6i$ $\mu = 61$			
S	5	2	2	2	5	6	4	2	4	3	2	6
	2	2	4	4	6	2	5	5	3	3	6	3
	2	4	2	4	4	5	4	5	4	3	4	3
	2	4	4	2	2	5	5	6	3	6	3	3

D'après les congruences de l'article précédent, on a

$$\text{pour } \mu = 8n + 1 \quad (\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\,.\,. \equiv 1 + i$$
$$\text{et pour } \mu = 8n + 5 \quad (\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\,.\,. \equiv 1 + i.$$

Or, le nombres des nombres de

$$\delta + 1,\ \delta' + 1,\ \delta'' + 1\ \ldots$$

qui appartiennent respectivement aux classes A, B, C, D, étant (3.0), (3.1), (3.2), (3.3), il s'ensuit immédiatement que pour $\mu = 8n + 1$ le caractère biquadratique de $1 + i$, suivant la module 4, sera congru avec

$$(3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3)$$

et de même, dans le cas de $\mu = 8n + 5$, avec

$$(1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3).$$

Dès que les nombres (0.0), (0.1) . . . seront déterminés, le caractère biquadratique de $1 + i$ sera donc aussi immédiatement connu.

Il s'agit donc, étant donné le nombre premier primaire $M = a + bi$, d'en déduire directement les nombres du tableau S. Les considérations nécessaires à cet effet sont essentiellement les mêmes que celles développées par Gauss dans les Art. 16—20 de la *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio prima.*

Gauss traite, dans ce mémoire, de la théorie des nombres réels, mais il est facile de voir que ce qu'il y donne est dans un étroit

rapport avec la question dont nous nous occupons en ce moment.

Pour avoir sous les yeux le développement complet, il sera nécessaire de reproduire ici l'argumentatiou de Gauss, avec les légères modifications réclamées par la différence des sujets.

Il faut remarquer, à cet égard, que, pour un nombre premier $M = -q$ appartenant à la première classe du paragraphe 4, il n'existe, dans la théorie réelle de Gauss, rien d'analogue à ce qui sera exposé ici dans la théorie des nombres complexes entiers.

Pour ce qui va suivre, il est nécessaire de traiter séparément le cas où la norme μ est de la forme $8n+1$ et celui où elle est de la forme $8n+5$. Je commence par le premier, dans lequel le nombre premier M appartient donc à l'une des deux premières classes du paragraphe 4.

---

7. Pour $\mu = 8n+1$, on a $(-1)^{\frac{\mu-1}{4}} = +1$, de sorte que -1 est résidu biquadratique de M et fait partie de la classe A, ou, à proprement parler, est congru suivant le module M avec un nombre de A. Mais, dans ce genre de considérations, il est permis, attendu que les nombres congrus peuvent se remplacer entre eux, de les regarder comme égaux, et pour la commodité je ferai usage de cette observation, dont il ne pourra résulter aucune obscurité.

Le caractère biquadratique de -1 étant donc égal à zéro, il s'ensuit que lorsque α, β, γ, δ appartiennent respectivement aux classes A, B, C, D, les nombres $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ entrent aussi dans ces mêmes classes, $-\alpha$ dans A, $-\beta$ dans B, $-\gamma$ dans C et $-\delta$ dans D.

Or, le nombre (0.0) est évidemment égal au nombre des solutions de la congruence

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \text{ mod. } M,$$

où α et α' sont à prendre arbitrairement dans le groupe A; mais, comme à chaque nombre α' correspond un nombre $\alpha'' = p - \alpha'$,

ce nombre de solutions est le même que celui de la congruence

$$\alpha + \alpha'' + 1 \equiv 0,$$

où α et α'' doivent également être pris dans A.

En raisonnant exactement de la même manière au sujet des nombres (0.1), (0.2), etc., on trouve que

le signe	représente le nombre des solutions de:
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0 \bmod. M.$
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(0.3)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.3)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$
(2.2)	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$
(2.3)	$\gamma + \delta + 1 \equiv 0$
(3.0)	$\delta + \alpha + 1 \equiv 0$
(3.1)	$\delta + \beta + 1 \equiv 0$
(3.2)	$\delta + \gamma + 1 \equiv 0$
(3.3)	$\delta + \delta' + 1 \equiv 0$

Il en résulte donc immédiatement ces six relations:

$$(0.1) = (1.0),\ (0.2) = (2.0),\ (0.3) = (3.0)$$
$$(1.2) = (2.1),\ (1.3) = (3.1)$$
$$(2.3) = (3.2.)$$

Cinq autres relations entre les nombres (0.0), (0.1), etc. s'obtiennent par la considération suivante. Si α, β, γ sont des nombres de A, B, C, et qu'on détermine x, y, z de telle sorte qu'on ait

$$\alpha x \equiv 1,\ \beta\ y \equiv 1,\ \gamma z \equiv 1 \bmod. M,$$

x appartient évidemment à la classe A, y à D, z à C, de sorte qu'on peut écrire:

$$\alpha\alpha' \equiv 1, \ \beta\delta \equiv 1, \ \gamma\gamma' \equiv 1.$$

Si l'on multiplie maintenant, en considérant une solution déterminée de $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$, cette congruence par δ, on obtient $\delta' + 1 + \delta \equiv 0$, où $\delta' \equiv \alpha\delta$ appartient à D. Réciproquement, $\delta' + 1 + \delta \equiv 0$, multipliée par β, donne de nouveau $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$. Il ressort de là que les deux congruences:

$$\alpha + \beta + 1 \equiv 0 \ \text{ et } \ \delta + \delta' + 1 \equiv 0$$

ont le même nombre de solutions, ou $(0.1) = (3.3)$.

Exactement de la même manière, on a:

$$\begin{aligned}
\gamma'(\alpha + \gamma + 1) &\equiv \gamma'' + 1 + \gamma' \\
\beta\,(\alpha + \delta + 1) &\equiv \beta' + 1 + \beta \\
\delta\,(\beta + \gamma + 1) &\equiv 1 + \beta' + \delta \\
\gamma'(\beta + \gamma + 1) &\equiv \delta + 1 + \gamma',
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut pareillement:

$$(0.2) = (2.2), \ (0.3) = (1.1), \ (1.2) = (1.3) = (2.3).$$

En tout, il existe donc *onze* relations entre les seize nombres du schéma S, et ces nombres sont ainsi ramenés à *cinq*, différents entre eux, qui seront désignés par h, j, k, l, m. Le schéma S prend alors cette forme:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{matrix}$$

---

8. Le nombre -1 entre dans A, et correspond donc au nombre 0 de A'. Ce nombre 0 de A' ne se trouve dans aucune des classes A, B, C, D, mais tout autre nombre de A' entre évidemment dans l'un des groupes A, B, C ou D. Comme $\mu = 8n + 1$, $\frac{\mu - 1}{4} = 2n$, on a donc:

$$(0.0) + (0.1) + (0.2) + (0.3) = 2n - 1.$$

Tous les nombres de B', C'' D' font partie d'une des classes A, B, C, D, de sorte qu'on a:

$$(1.0) + (1.1) + (1.2) + (1.3) = 2n$$
$$(2.0) + (2,1) + (2.2) + (2.3) = 2n$$
$$(3.0) + (3.1) + (3.2) + (3.3) = 2n$$

Ces quatre équations se réduisent aux trois relations suivantes entre h, j, k, l et m:

$$h + j + k + l = 2n - 1$$
$$j + l + 2m = 2n$$
$$k + m = n.$$

---

9. Enfin, une nouvelle relation, non linéaire, entre h, j, k, l, m s'obtient encore par la considération du nombre des solutions de la congruence:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M,$$

où α, β, γ doivent être choisis de toutes les manières possibles dans les classes A, B, C.

Si l'on prend d'abord pour α successivement tous les nombres de A, il arrive respectivement h, j, k, l fois que $\alpha + 1$ appartienne à A, B, C, D, et le cas unique de $\alpha + 1 \equiv 0$ peut être négligé, vu que la congruence $\beta + \gamma \equiv 0$ n'admet aucune solution.

Pour chacune des h valeurs qui rendent $\alpha + 1 \equiv \alpha_0$, β et γ doivent alors être choisis de façon qu'on ait:

$$\alpha_0 + \beta + \gamma \equiv 0.$$

Le nombre des solutions de cette congruence (pour une valeur donnée de α_0) est $= m$, comme on le reconnaît immédiatement en la multipliant par α_0', ce qui la transforme, à cause de $\alpha_0 \alpha_0' = 1$ mod. M, en:

$$1 + \beta' + \gamma' \equiv 0.$$

Comme ce raisonnement est applicable à chacune des h valeurs qui font que $\alpha + 1$ appartient de nouveau à A, on obtient de cette manière hm solutions de la congruence:

$$1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0.$$

Il arrive ensuite j fois que $\alpha + 1$ appartienne à B, et pour chaque valeur déterminée $\alpha + 1 \equiv \beta_0$ la congruence:

$$\beta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

a le même nombre de solutions que celle-ci:

$$1 + \alpha + \beta' \equiv 0;$$

ce nombre est donc $= j$. Cela ressort immédiatement de:

$$\delta_0(\beta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \alpha + \beta',$$

lorsque $\beta_0 \delta_0 \equiv 1$.

Ces valeurs de α, qui font appartenir $\alpha + 1$ à B, donnent donc en tout jj solutions de la congruence considérée.

Pour $\alpha + 1 \equiv \gamma_0$, ce qui arrive k fois, la congruence

$$\gamma_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

a l solutions, car:

$$\gamma_0' (\gamma_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \delta + \alpha.$$

Les valeurs de α qui font appartenir $\alpha + 1$ à C fournissent donc en tout $k l$ solutions.

A-t-on enfin $\alpha + 1 = \delta_0$, ce qui arrive l fois, alors la congruence

$$\delta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

a, en raison de

$$\beta_0 (\delta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \gamma + \delta,$$

m solutions, et ces valeurs de α donnent donc $l m$ solutions.

Le nombre total des solutions de la congruence:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M$$

est donc:

$$= h m + j j + k l + l m.$$

Mais ce nombre peut encore être calculé d'une autre manière. Si l'on prend pour β successivement tous les nombres de B, il arrive j, l, m, m fois que $\beta + 1$ appartienne aux groupes A, B, C, D. Or, pour chacun de ces quatre nombres, on trouve qu'il y a respectivement k, m, k, m solutions de la congruence donnée, de sorte que le nombre total des solutions est:

$$j k + l m + m k + m m.$$

---

10. En égalant entre elles ces deux expressions du nombre des solutions de $\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0$, on a:

$$0=hm+jj+kl-jk-km-mm,$$

ou, si l'on élimine h à l'aide de la valeur $h=2m-k-1$, qui se déduit facilement des équations obtenues dans le paragraphe 8 entre h, j, k, l, m,

$$0=(k-m)^2+jj+kl-jk-kk-m.$$

D'après les relations du paragraphe 8, on a

$$k=\tfrac{1}{2}(j+l),$$

et cette valeur étant substituée dans $jj+kl-jk-kk$, cette expression devient $=\frac{1}{4}(l-j)^2$, de sorte que l'équation précédente, après multiplication par 4, se transforme en

$$0=4(k-m)^2+(l-j)^2-4m;$$

mais:

$$4m=2(k+m)-2(k-m)=2n-2(k-m),$$

par conséquent:

$$2n=4(k-m)^2+2(k-m)+(l-j)^2,$$

ou bien:

$$\mu=8n+1=(4(k-m)+1)^2+4(l-j)^2;$$

en posant

$$4(k-m)+1=A,\ 2(l-j)=B,$$

il vient donc:

$$\mu=A^2+B^2.$$

Dans cette équation on a $A\equiv 1$ mod. 4, et B pair.

Il est maintenant facile d'exprimer h, j, k, l, m en A et B, ce qui donne:

$$8h = 4n - 3A - 5$$
$$8j = 4n + A - 2B - 1$$
$$8k = 4n + A - 1$$
$$8l = 4n + A + 2B - 1$$
$$8m = 4n - A + 1.$$

Jusqu'ici nous avons seulement supposé que la norme μ avait la forme $8n + 1$; mais, pour la détermination ultérieure de A et B, il faut maintenant traiter séparément les cas I et II du paragraphe 4.

---

11. Soit donc, en premier lieu:

$$M = -q = -(4r + 3).$$

Dans ce cas, on a:

$$\mu = M^2 = q^2$$

et par conséquent:

$$q^2 = A^2 + B^2.$$

q étant un nombre premier de la forme $4r + 3$, on sait que q^2 ne peut être représenté que d'une seule manière comme la somme de deux carrés, savoir, en prenant pour la base de l'un des carrés (impair) $\pm q$, et pour la base de l'autre carré 0; effectivement, si aucun des deux nombres A et B n'était égal à 0 ou divisible par q, on pourrait déterminer un nombre x, différent de 0, de telle sorte que:

$$Ax \equiv B \text{ mod. } q.$$

Mais, de $$q^2 = A^2 + B^2,$$

il suit $$A^2 \equiv -B^2 \text{ mod. } q$$

et aussi $A^2x^2 \equiv B^2$, par conséquent

$$x^2 \equiv -1 \text{ mod. } q.$$

Or, cette dernière congruence est impossible, parce que -1 est non-résidu quadratique de q.

De $q^2 = A^2 + B^2$ il suit donc nécessairement:

$$A = \pm q, \quad B = 0,$$

et comme $A \equiv 1$ mod. 4, le signe de A se trouve complètement déterminé et on a:

$$A = -q = M.$$

A et B étant ainsi trouvés, on a finalement:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3M - 5 \\ 8j &= 4n + M - 1 \\ 8k &= 4n + M - 1 \\ 8l &= 4n + M - 1 \\ 8m &= 4n - M + 1, \end{aligned}$$

où $8n + 1 = M^2$.

Par ces formules, la dépendance entre les nombres du tableau S et le nombre premier M est donc exprimée de la manière la plus simple, dans le cas où M appartient à la première classe du paragraphe 4.

---

12. Si, en second lieu, on suppose $M = a + bi$, où $a - 1 \equiv b \equiv 0$ mod. 4 et où la norme $\mu = a^2 + b^2$ est un nombre premier réel, on a donc:

$$\mu = a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

Or, un nombre premier de la forme $4k + 1$ ne peut être représenté que d'une seule manière par la somme de deux carrés, et comme a et A sont tous les deux $\equiv 1$ mod. 4, il s'ensuit $A = a$, $B = \pm b$.

Le signe de B est déterminé par les considérations suivantes, qui demandent la démonstration préalable de cette proposition auxiliaire:

„Lorsque z parcourt un système complet de résidus mod. M, à l'exception du terme divisible par M, on a

$$\Sigma z^t \equiv -1 \quad \text{ou} \quad \equiv 0 \text{ mod. } M$$

suivant que t est divisible ou non par $\mu - 1$".

La première partie de cette proposition est évidente, car si t est divisible par $\mu - 1$, on a $z^t \equiv 1$, donc $\Sigma\, z^t \equiv \mu - 1 \equiv -1$ mod. M.

Pour démontrer aussi la seconde partie, soit g une racine primitive pour le nombre premier M, de sorte que les valeurs parcourues par z soient congrues avec

$$g^0,\ g^1,\ g^2\ g^3 \ldots\ g^{\mu-2}.$$

Il en résulte:

$$\Sigma\, z^t \equiv 1 + g^t + g^{2t} + \ldots + g^{(\mu-2)t} \text{ mod. } M$$

ou

$$(1 - g^t)\, \Sigma\, z^t \equiv 1 - g^{(\mu-1)t} \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Or, si t n'est pas divisible par $\mu - 1$, $1 - g^t$ n'est pas divisible par M, et on a par conséquent $\Sigma\, z^t \equiv 0$ c. q. f. d.

Cette proposition auxiliaire est évidemment valable pour un nombre premier M quelconque.

D'après le développement binomial, on a maintenant

$$(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} = z^{\frac{\mu-1}{2}} + \ldots + 1,$$

d'où il suit, lorsque le signe Σ se rapporte aux mêmes valeurs de z que tout à l'heure,

$$\Sigma\, (z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \text{ mod. } M.$$

Mais, d'un autre côté, les nombres z^2, dans leur ensemble, forment évidemment tous les nombres des groupes A et C, chacun de ces nombres étant pris deux fois. Des nombres

$$z^2 + 1$$

il y en a donc	2 (0.0) + 2 (2.0)	qui appartiennent à A		
	2 (0.1) + 2 (2.1)	„	„	„ B
	2 (0.2) + 2 (2.2)	„	„	„ C
	2 (0.3) + 2 (2.3)	„	„	„ D,

et comme les puissances $\frac{\mu - 1}{4}$ des nombres de A, B, C, D

sont respectivement congrues avec 1, i, -1, $-i$, on a donc:

$$\begin{aligned}\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv 2\,[(0.0)+(2.0)-(0.2)-(2.2)] \\ &\quad + 2i\,[(0.1)+(2.1)-(0.3)-(2.3)] \\ &\equiv 2(h-k)+2i(j-l),\end{aligned}$$

ou, en introduisant les valeurs du paragraphe 10 et remarquant que $A=a$,

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -a-1-Bi.$$

De la comparaison avec le premier résultat,

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1,$$

il suit

$$a+Bi\equiv 0 \text{ mod. } (M=a+bi),$$

donc:

$$B=b.$$

Par là, les valeurs de h, j, k, l, m du paragraphe 10 se transforment finalement en

$$\begin{aligned}8h &= 4n-3a-5\\ 8j &= 4n+a-2b-1\\ 8k &= 4n+a-1\\ 8l &= 4n+a+2b-1\\ 8m &= 4n-a+1,\end{aligned}$$

où $8n+1=a^2+b^2$ est donc la norme du nombre premier M.

---

13. Après avoir traité les deux cas dans lesquels $\mu=8n+1$, il faut maintenant considérer le cas $\mu=8n+5$.

Puisque $\frac{\mu-1}{4}$ est alors impair, -1 appartient au groupe C, et, comme il est facile de le voir, les nombres:

$p-\alpha,\ p-\alpha',\ p-\alpha''$ . . appartiennent tous à C.
$p-\beta,\ p-\beta',\ p-\beta''$ . . " " " D.

Moyennant ces remarques, on reconnaît sans peine que

le signe	représente le nombre des solutions de:
(0.0)	$\alpha+\gamma+1\equiv 0$
(0.1)	$\alpha+\delta+1\equiv 0$
(0.2)	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$
(0.3)	$\alpha+\beta+1\equiv 0$
(1.0)	$\beta+\gamma+1\equiv 0$
(1.1)	$\beta+\delta+1\equiv 0$
(1.2)	$\beta+\alpha+1\equiv 0$
(1.3)	$\beta+\beta'+1\equiv 0$
(2.0)	$\gamma+\gamma'+1\equiv 0$
(2.1)	$\gamma+\delta+1\equiv 0$
(2.2)	$\gamma+\alpha+1\equiv 0$
(2.3)	$\gamma+\beta+1\equiv 0$
(3.0)	$\delta+\gamma+1\equiv 0$
(3.1)	$\delta+\delta'+1\equiv 0$
(3.2)	$\delta+\alpha+1\equiv 0$
(3.3)	$\delta+\beta+1\equiv 0$

d'où découlent les six relations:

$$(0.0)=(2.2)\qquad (0.1)=(3.2)\qquad (0.3)=(1.2)$$
$$(1.0)=(2.3)\qquad (1.1)=(3.3)$$
$$(2.1)=(3.0).$$

Comme, de même que précédemment, $\alpha\alpha'\equiv\beta\delta\equiv\gamma\gamma'\equiv 1$, on a:

$$\gamma'(\alpha+\gamma+1)\equiv\gamma''+1+\gamma'$$
$$\beta\ (\alpha+\delta+1)\equiv\beta'+1+\beta$$
$$\delta\ (\alpha+\beta+1)\equiv\delta'+1+\delta$$
$$\delta\ (\beta+\gamma+1)\equiv 1+\beta'+\delta$$
$$\gamma'\ (\beta+\gamma+1)\equiv\delta+1+\gamma',$$

d'où l'on conclut:

$$(0.0) = (2.0), \qquad (0.1) = (1.3), \qquad (0.3) = (3.1),$$
$$(1.0) = (1.1) = (2.1).$$

Par suite de ces onze relations, le schéma S prend cette forme:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m. \end{matrix}$$

Comme -1 entre dans le groupe C, donc 0 dans C', on trouve, exactement de la même manière qu'au paragr. 8:

$$h + j + k + l = \frac{\mu - 1}{4} = 2n + 1$$
$$2m + l + j = 2n + 1$$
$$h + m = n.$$

Enfin, la considération du nombre des solutions de la congruence:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0$$

fournit encore une relation entre h, j, k, l, m. Si l'on prend d'abord pour α toutes les valeurs qui appartiennent à A, il arrive respectivement h, j, k, l fois que $\alpha + 1$ appartient aux groupes A, B, C, D. On trouve en outre, de la même manière qu'au paragr. 9, que pour chacun de ces cas la congruence a respectivement m, l, j, m solutions, de sorte que le nombre total des solutions est:

$$hm + jl + kj + lm.$$

Prend-on, au contraire, d'abord pour β toutes les valeurs B, alors il arrive respectivement m, m, l, j fois que $\beta + 1$ appartient aux groupes A, B, C, D. Pour chacun de ces cas, on trouve alors que la congruence a respectivement h, m, h, m solutions, ce qui donne pour le nombre total des solutions:

$$mh + mm + lh + jm.$$

(à suivre.)

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE

DES

RÉSIDUS CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES

PAR

T. J. STIELTJES Jr.

(*suite.*)

14. Egalons maintenant entre elles les deux expressions trouvées pour le nombre des solutions de la congruence

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M;$$

il vient:

$$0 = m^2 + lh + jm - jl - kj - lm,$$

ou, à cause de la valeur $k = 2m - h$, qui résulte immédiatement des relations linéaires établies entre h, j, k, l, m au paragr. 13,

$$0 = m^2 + lh + hj - jl - jm - lm.$$

A l'aide de $j + l = 1 + 2h$, on peut exprimer j et l en fonction de leur différence, ce qui donne

$$2j = 1 + 2h + (j - l)$$
$$2l = 1 + 2h - (j - l),$$

et, par l'introduction de ces valeurs dans l'équation précédente, celle-ci se transforme en:

$$0 = 4m^2 - 4m - 1 + 4h^2 - 8hm + (j - l)^2,$$

ou, à cause de

$$4m = 2(h + m) - 2(h - m) = 2n - 2(h - m),$$

en

$$0 = 4(h - m)^2 - 2n + 2(h - m) - 1 + (j - l)^2$$

et finalement en:

$$\mu = 8n + 5 = (4(h - m) + 1)^2 + 4(j - l)^2 ;$$

pour

$$A = 4(h - m) + 1, \quad B = 2j - 2l,$$

on a donc:

$$\mu = A^2 + B^2.$$

Au moyen de A et B il est maintenant facile d'exprimer h, j, k, l, m, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n + A - 1 \\ 8j &= 4n + A + 2B - 3 \\ 8k &= 4n - 3A + 3 \\ 8l &= 4n + A - 2B + 3 \\ 8m &= 4n - A + 1 \end{aligned}$$

Reste encore à déterminer A et B. Or μ, nombre premier réel de la forme $4n + 1$, ne peut être représenté que d'une seule manière par la somme de deux carrés, et comme

$$M = a + bi,$$

on a

$$\mu = a^2 + b^2,$$

où

$$a \equiv -1, \quad b \equiv 2 \text{ mod. } 4.$$

De là résulte donc:

$$A = -a \text{ et } B = \pm b.$$

Le signe de B s'obtient par une considération analogue à celle du paragr. 12.

On trouve aisément:

$$\Sigma (z^2 + 1)^{\frac{1}{4}(\mu - 1)} \equiv -1 \equiv 2(h - k) + 2i(j - l) \text{ mod. } M.$$

Or:

$$2(h - k) = A - 1, \quad 2(j - l) = B,$$

donc:

$$-1 \equiv A - 1 + Bi$$

$$0 \equiv A + Bi \text{ mod. } (M = a + bi).$$

Puisqu'on a déjà trouvé $A = -a$, il s'ensuit $B = -b$, de sorte qu'on a finalement:

$$8h = 4n - a - 1,$$
$$8j = 4n - a - 2b + 3,$$
$$8k = 4n + 3a + 3,$$
$$8l = 4n - a + 2b + 3,$$
$$8m = 4n + a + 1.$$

---

15. En rapprochant les résultats obtenus, on voit que pour $\mu = 8n + 1$ le schéma S est de la forme:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{matrix}$$

où, pour $M = -q$, on a

$$8h = 4n - 3M - 5$$
$$8j = 8k = 8l = 4n + M - 1$$
$$8m = 4n - M + 1;$$

pour $M = a + bi$,

$$8h = 4n - 3a - 5$$
$$8j = 4n + a - 2b - 1$$
$$8k = 4n + a - 1$$
$$8l = 4n + a + 2b - 1$$
$$8m = 4n - a + 1.$$

Pour $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$, le schéma S a la forme:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m \end{matrix}$$

où:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1 \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3 \\ 8k &= 4n + 3a + 3 \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3 \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

Ainsi qu'il ressort de ces formules, le changement de b en $-b$ correspond à une permutation de j et l, tant dans le cas de $\mu = 8n + 1$, que lorsque $\mu = 8n + 5$.

D'après les congruences du paragr. 5, on a, dans le cas $\mu = 8n + 1$, pour le caractère de $1 + i$ suivant le mod. 4:

$$\equiv (3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3) = 3m + 3j \equiv -m - j,$$

et pour celui de $1 - i$:

$$\equiv (1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3) = l + 5m \equiv l + m,$$

donc, pour $M = -q$:

$$\text{Caractère } (1 + i) \equiv -n = -\frac{q^2 - 1}{8}$$

$$\text{Caractère } (1 - i) \equiv \quad n = \frac{q^2 - 1}{8}.$$

Or, $\dfrac{q+1}{4}$ et $\dfrac{q-3}{4}$ sont des nombres entiers consécutifs; leur produit est donc pair et $\dfrac{(q+1)\,(q-3)}{8}$ est divisible par 4, de sorte qu'on a:

$$\frac{q^2 - 1}{8} \equiv \frac{q^2 - 1}{8} - \frac{(q+1)\,(q-3)}{8} = + \frac{q+1}{4},$$

par conséquent

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(M-1)}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{4}(M-1)},$$

et, vu que -1 est résidu biquadratique,

$$\left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(M-1)}, \qquad \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{4}(M-1)},$$

tandis que, de $2 = (1 - i)(1 + i)$, il suit encore:

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-2}{M}\right)\right) = 1.$$

Pour $M = a + bi$, au contraire, on a

$$-m - j = -n + \tfrac{1}{4} b$$
$$l + m = \quad n + \tfrac{1}{4} b$$

et

$$n = \frac{a^2 + b^2 - 1}{8}.$$

Mais évidemment $\frac{a-1}{4} \cdot \frac{a+3}{4}$ est pair, et par conséquent $\frac{(a-1)(a+3)}{8}$ est divisible par 4, d'où il suit:

$$\frac{a^2 - 1}{8} \equiv \frac{-a+1}{4} \text{ mod. } 4;$$

en outre, b étant divisible par 4, l'un des nombres b, $b \pm 4$ est divisible par 8; $\frac{b(b-4)}{8}$ est donc divisible par 4 et on a

$$\frac{b^2}{8} \equiv \frac{b^2}{8} - \frac{b(b \mp 4)}{8} = \pm \tfrac{1}{2} b,$$

de sorte que

$$n \equiv \tfrac{1}{4}(-a + 1 \pm 2b) \quad \text{mod. } 4$$

et finalement

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}$$
$$\left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a+1-b)}$$
$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{2}b}.$$

Lorsque, enfin, $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$, on a:

Caractère $(1 + i) \equiv (1.1) + 2(1.2) + 3(1.3) = m + 2l + 3j$ mod. 4

Caractère $(1 - i) \equiv (3.1) + 2(3.2) + 3(3.3) = l + 2j + 3m$ mod. 4,

où, toutes les congruences ayant rapport au module 4, on a

$$m + 2l + 3j = 3n + \tfrac{1}{4}(-2a - b + 8),$$
$$l + 2j + 3m = 3n + \tfrac{1}{4}(-b + 6) \equiv -n + \tfrac{1}{4}(-b + 6),$$
$$n = \frac{a^2 + b^2 - 5}{8}.$$

$\frac{a-3}{4}\cdot\frac{a+1}{4}$ étant pair, $\frac{(a-3)(a+1)}{8}$ est divisible par 4,

et il en est de même de $\frac{(b-2)(b+2)}{8}$; donc

$$n \equiv \frac{a^2 + b^2 - 5}{8} - \frac{(a-3)(a+1)}{8} - \frac{b^2 - 4}{8} = \tfrac{1}{4}(+a + 1),$$

de sorte qu'on obtient finalement

$$m + 2l + 3j \equiv \tfrac{1}{4}(a - b + 11) \equiv (a - b - 5)$$
$$l + 2j + 3m \equiv \tfrac{1}{4}(-a - b + 5),$$

par suite

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b-5)}, \quad \left(\left(\frac{1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a-b+5)}$$

et, le caractère de -1 étant égal à deux,

$$\left(\left(\frac{-1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b+3)}, \quad \left(\left(\frac{-1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a-b-3)}$$

et
$$\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right) = i^{-\frac{1}{2}b}.$$

Par là se trouve déterminé, dans chaque cas, le caractère biquadratique de $1+i$, ainsi que celui de $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, par rapport à un nombre premier primaire. Les résultats concordent entièrement avec ceux donnés par Gauss dans les Art. 63, 64 de la *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda* et démontrés par lui, d'une manière tout à fait différente, dans les Art. 68—76.

---

16. Relativement à l'analogie qui existe entre une grande partie des considérations précédentes et celles que Gauss a développées dans les Art. 8 et suiv. de son *premier* Mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques, il y a à faire les remarques suivantes :

Gauss considère des nombres réels; le module premier p est de la forme $4n + 1$, et il faut distinguer les deux cas $p = 8n + 1$, $p = 8n + 5$; p a donc la même signification que la norme μ dans les cas II et III de notre paragraphe 4.

Les nombres $1, 2, 3 \ldots p - 1$ sont partagés par Gauss en 4 classes A, B, C, D. Les nombres de ces classes étant représentés par α, β, γ, δ, cette classification est fondée sur les congruences:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \text{ mod. } \mu = p$$
$$\beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv f$$
$$\gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1$$
$$\delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -f,$$

où $f^2 \equiv -1$ mod. p, et pour $\mu = a^2 + b^2$

$$a \equiv 1 \text{ mod. } 4, \quad a + bf \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Pour $p = \mu = 8n + 1$, a et b ont la même signification que ci-dessus; pour $p = 8n + 5$, a et b, chez Gauss, ne diffèrent que par le signe des valeurs qu'ils ont dans ce qui précède, où $M = a + bi$ est un nombre premier complexe *primaire*.

Lorsque, toutefois, on admet aussi des nombres complexes, il est clair que les congruences ci-dessus, qui sont relatives au module $p = \mu$, restent valables pour le module $a + bi$, de sorte qu'on a aussi $a + bf \equiv 0$ mod. $a + bi$, d'où résulte $f \equiv i$ mod. $a + bi$, et par conséquent:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1, \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i, \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1, \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \text{ mod. } (a + bi).$$

La classification de Gauss est donc identique à celle établie suivant le caractère biquadratique 0, 1, 2, 3 par rapport au module $a + bi$.

Effectivement, les nombres réels 1, 2, 3 . ., $p - 1$ forment pour le module $a + bi$ un système complet de résidus incongrus, non divisibles par le module.

Aussi, en remplaçant dans les deux derniers exemples du paragraphe 5 les résidus complexes par les nombres réels congrus, ce qui se fait sans peine à l'aide de $i \equiv 27$ mod. $(-3-8i)$ et $i \equiv 11$ mod. $(-5+6i)$, on obtient

mod. $-3-8i \quad \mu = 73$

A 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72.
B 5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68.
C 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70.
D 11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62.

mod. $-5+6i \quad \mu = 61$

A 1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58.
B 2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55.
C 3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60.
D 6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59,

en accord parfait avec les exemples donnés par Gauss dans l'Art. 11 de son premier Mémoire.

Le cas I de notre paragraphe 4 est le seul pour lequel il n'existe rien d'analogue dans la théorie réelle de Gauss, ce qui

tient à ce que dans ce cas on ne peut pas former, avec des nombres réels, un système complet de résidus.

L'observation que la division en quatre classes A, B, C, D, effectuée par Gauss dans son premier Mémoire, est identique à celle faite d'après le caractère biquadratique par rapport au module $a + bi$, fournit aussi le moyen de déduire immédiatement tous les théorèmes que Gauss a trouvés par induction dans son second Mémoire, Art. 28, mais dont, à ma connaissance, aucune démonstration n'a encore été donnée jusqu'ici.

Ces théorèmes sont relatifs à la présence d'un nombre premier réel m dans les quatre classes A, B, C, D, ou, d'après ce qui précède, au caractère biquadratique de m par rapport au module $a + bi$.

17. Je vais reproduire maintenant les remarques formulées par Gauss dans l'Art. 28. Le module premier $p = \mu$ étant supposé de la forme $4n + 1$, il s'agit maintenant, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, de déterminer la valeur du symbole

$$\left(\left(\frac{m}{a + bi}\right)\right),$$

où m est un nombre premier réel; la circonstance que, pour $\mu = 8n + 5$, a et b ont chez Gauss un signe différent de celui des valeurs du paragraphe 14, n'a aucune influence sur l'énoncé des théorèmes. Le nombre premier m recevra un signe tel qu'il soit toujours $\equiv 1$ mod. 4, donc le signe *moins* lorsque, pris positivement, il est de la forme $4k + 3 = Q$; quant à un nombre premier positif de la forme $4k + 1$, il sera représenté par P. Les remarques de Gauss peuvent alors être exprimées de cette manière :

I. Lorsque $a \equiv 0$ mod. (m), la valeur de $\left(\left(\frac{m}{a + bi}\right)\right)$ est $= +1$ ou $= -1$; elle est égale à $+1$ si m a la forme $8r \pm 1$, égale à -1 si m a la forme $8r \pm 3$.

II. Lorsque a n'est pas divisible par m, la valeur du symbole dépend uniquement du nombre complètement déterminé x, qui satisfait à

$$b \equiv ax \text{ mod. } m.$$

Pour $m = P$, x peut prendre ici les valeurs suivantes:

$$0, 1, 2, 3 \ldots . P - 1,$$

à l'exception des deux valeurs f et $P - f$ qui satisfont à $yy \equiv -1$ mod. P. Ces deux valeurs ne peuvent évidemment pas se présenter, car de $b \equiv ay$ il résulterait

$$b^2 \equiv -a^2 \text{ ou } a^2 + b^2 = p \equiv 0 \text{ mod. } P,$$

c'est-à-dire que p devrait être divisible par P.

Pour $m = -Q$, au contraire, x peut prendre toutes les valeurs

$$0, 1, 2, 3 \ldots . Q - 1.$$

Ces valeurs de x peuvent être réparties en 4 classes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, de telle sorte que,

pour $b \equiv a\alpha$ mod. m, la valeur du symbole soit $= 1$
$b \equiv a\beta$ „ „ „ „ „ „ $= i$
$b \equiv a\gamma$ „ „ „ „ „ „ $= -1$
$b \equiv a\delta$ „ „ „ „ „ „ $= -i$,

ou, ce qui revient au même, que dans ces cas m appartienne respectivement aux classes A, B, C, D.

Or, en ce qui concerne la *quotité* des nombres α, β, γ, δ, existe cette règle: que 3 de ces quotités sont égales, tandis que la 4ième est plus petite d'une unité; d'ailleurs, cette quatrième quotité est celle des α lorsque, pour $a \equiv 0$, m appartient à A, et celle des γ lorsque, pour $a \equiv 0$, m appartient à C.

18. Soit donc, en premier lieu, $m = -Q$; d'après la loi de réciprocité, on a alors:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

et pour $a \equiv 0$ mod. Q:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{Q}\right)\right) = \left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) \left(\left(\frac{i}{Q}\right)\right) = i^{\frac{Q^2-1}{4}},$$

vu que $\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1$; en effet,

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) \equiv b^{\frac{Q^2-1}{4}} \text{ mod. } Q,$$

et comme Q est de la forme $4r+3$, donc $\frac{Q^2-1}{4} = (Q-1)\frac{Q+1}{4}$ un multiple de $Q-1$, il suit du théorème de Fermat:

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1.$$

Pour $Q = 8n+3$ on trouve maintenant:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = -1,$$

pour $Q = 8n+7$:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = +1.$$

Lorsque, au contraire, on a $m = P = (A+Bi)(A-Bi)$, où $A+Bi$ et $A-Bi$ sont les facteurs primaires de P, il suit de la loi de réciprocité:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

et pour $a \equiv 0$ mod. P:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{A+Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{bi}{A-Bi}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{-bi}{A+Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{+bi}{A-Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right).$$

Or, en général, comme l'on sait,

$$\left(\left(\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right)\right)\ \left(\left(\frac{\alpha-\beta i}{A-Bi}\right)\right) = 1, \text{ donc:}$$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right) = (-1)^{\frac{P-1}{4}},$$

ou, pour $P = 8n+1$,

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = 1,$$

et pour $P = 8n+5$,

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = -1.$$

Ainsi se trouve complètement démontrée la proposition énoncée au paragraphe précédent, sous I.

---

19. Supposons maintenant que a ne soit pas divisible par m, et considérons d'abord le cas le plus simple

$$m = -Q;$$

on a donc alors:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

et pour $b \equiv ax$ mod. Q:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a(1+xi)}{Q}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right),$$

à cause de l'égalité $\left(\left(\frac{a}{Q}\right)\right) = 1$, déjà démontrée au paragraphe précédent. Du résultat obtenu:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right)$$

il ressort déjà que la valeur du symbole à gauche dépend uniquement du nombre x, lequel peut prendre les Q valeurs:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ Q-1\ .$$

Nous n'avons donc plus qu'à résoudre cette question: lorsque le module Q est un nombre premier de la forme $4n+3$, combien, parmi les nombres:

$$1,\ 1+i,\ 1+2i,\ 1+3i\ \ldots\ldots\ 1+(Q-1)i,$$

y en a-t-il qui appartiennent respectivement aux classes A, B, C, D?

A cet effet, je remarquerai, en premier lieu, qu'on peut prendre, comme système complet de résidus non divisibles par Q, les nombres:

$$\alpha+\beta i$$

où α et β parcourent les valeurs $0, 1, 2, 3 \,.\, Q-1$, à l'exception de la combinaison $\alpha=0$, $\beta=0$; et, en second lieu, que les nombres

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ Q-1$$

appartiennent tous à A, de sorte que, lorsque le nombre

$$\alpha'+\beta' i$$

fait partie d'une certaine classe, celle-ci renferme également les nombres:

$$2(\alpha'+\beta' i),\ 3(\alpha'+\beta' i)\ \ldots\ldots\ (Q-1)(\alpha'+\beta' i),$$

qui, par l'omission de multiples de Q, peuvent tous être ramenés à la forme $\alpha+\beta i$, où α et β sont plus petits que Q. Or, les résidus de

$$\alpha',\ 2\alpha',\ 3\alpha'\ \ldots\ldots\ (q-1)\alpha',$$

sont, tant que α' n'est pas $=0$, congrus dans un certain ordre, suivant le module Q, avec les nombres:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ Q-1\ .$$

Dans le groupe des $Q-1$ nombres

$$\alpha'+\beta' i,\quad 2(\alpha'+\beta' i)\ldots\qquad (Q-1)(\alpha'+\beta' i),$$

appartenant tous à la même classe, il y en a donc un qui est congruent avec un des nombres

$$1+xi\qquad x=0,\ 1,\ 2\ldots\ Q-1.$$

Or, la quotité des nombres de chaque classe, $\frac{Q^2-1}{4} = (Q-1)\times\frac{q+1}{4}$, est un multiple de $Q-1$, et les $Q-1$ nombres sans partie réelle

$$i,\ 2i,\ 3i,\ldots\ (Q-1)i$$

appartiennent pour $q=8n+7$ à A, pour $q=8n+3$ à C.

Puisque tous les nombres de chaque classe dont la partie réelle n'est pas $=0$ peuvent être réunis, comme ci-dessus, en groupes de $q-1$ nombres, de telle sorte que dans chaque groupe il y ait *un* nombre à partie réelle $=1$, il en résulte que, pour $Q=8n+7$, il y a dans les classes A, B, C; D respectivement

$$\frac{Q-3}{4},\qquad \frac{Q+1}{4},\qquad \frac{Q+1}{4},\qquad \frac{Q+1}{4}$$

nombres $1+xi$.

Pour $Q=8n+3$, ces nombres sont:

$$\frac{Q+1}{4},\qquad \frac{Q+1}{4},\qquad \frac{Q-3}{4},\qquad \frac{Q+1}{4};$$

tandis que, d'après le paragr. 18, dans le cas $q\equiv 0$ mod. Q, pour $Q=8n+7$, et $8n+3$, Q appartenait respectivement aux classes A et C.

Tout ce qui se rapportait au cas $m=-Q$ est donc maintenant connu.

---

20. Pour $m = P = (A + Bi)(A - Bi)$ nous avons déjà trouvé:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

et par conséquent, lorsque

$$b \equiv a\,x \text{ mod. } P,$$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{A-Bi}\right)\right),$$

ou, puisque d'après une remarque déjà faite au paragraphe 18 le produit des deux derniers facteurs à droite est $= 1$,

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right);$$

de là résulte que la valeur du symbole à gauche dépend uniquement du nombre x, de sorte qu'il n'y a plus qu'à résoudre la question suivante: pour combien de valeurs de $1 + xi$ l'expression

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

acquiert-elle respectivement les valeurs $1, i, -1, -i$? On doit donner ici à x les valeurs

$$0, 1, 2, 3 \ldots . P-1,$$

à l'exception des deux racines de $y^2 \equiv -1$ mod. P.

Pour résoudre la question qui vient d'être posée, je considère un système complet de résidus incongrus non divisibles par le module $A + Bi$, et je les rapporte, d'après leur caractère biquadratique, à 4 groupes A, B, C, D. Chacun de ces résidus est supposé choisi de telle sorte que la partie réelle soit $= 1$, et que le facteur de i soit plus petit que P.

Ces suppositions peuvent être représentées ainsi:

$$\text{mod. } A+Bi \qquad A^2+B^2=P$$

$$\begin{array}{lll} \text{Classe} & A & \alpha=1+ai \\ & B & \beta=1+bi \\ & C & \gamma=1+ci \\ & D & \delta=1+di. \end{array}$$

Les nombres a, b, c, d, dans leur ensemble, concordent avec:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (P-1),$$

sauf que la valenr f, qui est $\equiv i$, manque, vu que $1+fi\equiv 0$ mod. $A+Bi$.

En opérant de la même manière avec $A-Bi$, on voit aisément que la classification sera:

$$\text{mod. } A-Bi$$

$$\begin{array}{lll} \text{Classe} & A & 1+(P-a)\,i \\ & B & 1+(P-d)\,i \\ & C & 1+(P-c)\,i \\ & D & 1+(P-b)\,i, \end{array}$$

car on a simultanément:

$$(1+xi)^{\frac{P-1}{4}} - i^{\rho} = (A+Bi)\,(C+Di)$$

$$(1-xi)^{\frac{P-1}{4}} - i^{3\rho} = (A-Bi)\,(C-Di).$$

Ainsi, lorsque $1+xi$ a suivant le module $A+Bi$ le caractère ϱ, $1-xi\equiv 1+(P-x)\,i$ a, suivant le module $A-Bi$, le caractère $3\,\varrho$.

---

21. Pour que

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

devienne égal à 1, il faut, lorsque

$$\left(\left(\frac{1 + xi}{A + Bi}\right)\right)$$

a l'une des valeurs 1, i, -1, $-i$, que

$$\left(\left(\frac{1 + xi}{A + Bi}\right)\right)$$

prenne une des valeurs 1, $-i$, -1, i; ou, en ayant égard aux deux divisions en classes: lorsque x appartient respectivement à a, b, c, d, il faut que, simultanément, $p - x$ appartienne aux nombres a, b, c, d.

On peut donc dire que le nombre des valeurs de x pour lesquelles on a

$$\left(\left(\frac{1 + xi}{A + Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{1 + xi}{A - Bi}\right)\right) = 1$$

est égal à la somme des nombres de solutions des congruences

$$\begin{aligned} a + a' &\equiv 0 \\ b + b' &\equiv 0 \\ c + c' &\equiv 0 \\ d + d' &\equiv 0 \end{aligned}$$

par rapport au module P, ou, ce qui revient au même, par rapport au module $A \pm Bi$.

On remarquera que la valeur $p - f$, exclue pour x, entre bien dans a, b, c, d, mais ne peut néanmoins apparaître dans aucune des congruences ci-dessus, parce que cela exigerait que f se trouvât également parmi les nombres a, b, c, d, ce qui n'est pas le cas.

On a $\alpha = 1 + ai$, de sorte que les congruences en question, après multiplication par i, deviennent:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &\equiv 2 \quad \text{mod. } (A + Bi) \\ \beta + \beta' &\equiv 2 \\ \gamma + \gamma' &\equiv 2 \\ \delta + \delta' &\equiv 2. \end{aligned}$$

Lorsque $\frac{p-1}{2}$ appartient à la classe A, les congruences précédentes, multipliées par $\frac{p-1}{2}$, se transforment en

$$\begin{aligned}
\alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \pmod{A + Bi}\\
\beta + \beta' + 1 &\equiv 0\\
\gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0\\
\delta + \delta' + 1 &\equiv 0,
\end{aligned}$$

de sorte que la somme des nombres de solutions de ces congruences est égale au nombre des valeurs de x qui rendent

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

égal à 1.

Mais on peut se convaincre immédiatement que ce résultat reste le même lorsque $\frac{p-1}{2}$ appartient aux classes B, C, D. Si, par exemple, $\frac{p-1}{2}$ appartient à B, il suit de $\alpha + \alpha' \equiv 2$, en multipliant par $\frac{p-1}{2}$,

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0,$$

et de $\beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv \delta + \delta' \equiv 2$, respectivement

$$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0,\ \ \delta + \delta' + 1 \equiv 0,\ \ \alpha + \alpha' + 1 \equiv 0.$$

Si l'on désigne par t, u, v, w, les nombres des valeurs de x qui rendent

$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$ respectivement égal à 1, i, -1, $-i$, t est donc la somme des nombres de solutions des congruences

$$\begin{aligned}
\alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \quad \text{mod. } A + Bi\\
\beta + \beta' + 1 &\equiv 0\\
\gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0\\
\delta + \delta' + 1 &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Exactement de la même manière, on trouve que

$u =$ la somme des nombres de solutions des congruences

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \alpha + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \beta + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \gamma + 1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

tandis que, pour v et w, on a à considérer les congruences

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \delta + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \alpha + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \beta + 1 &\equiv 0 \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} \alpha + \beta + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \gamma + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \delta + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \alpha + 1 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Dans le cas de $P = 8n + 1$, on a donc, d'après les paragraphes 7, 8:

$$\begin{aligned} t &= (0.0) + (1.1) + (2.2) + (3.3) = h + l + k + j = 2n - 1 \\ u &= (0.3) + (1.0) + (2.1) + (3.2) = j + m + m + l = 2n \\ v &= (0.2) + (1.3) + (2.0) + (3.1) = k + m + k + m = 2n \\ w &= (0.1) + (1.2) + (2.3) + (3.0) = l + j + m + m = 2n \end{aligned}$$

et dans le cas de $P = 8n + 5$, d'après le paragraphe 13.

$$\begin{aligned} t &= (0.2) + (1.3) + (2.0) + (3.1) = k + j + h + l = 2n + 1 \\ u &= (0.1) + (1.2) + (2.3) + (3.0) = j + l + m + m = 2n + 1 \\ v &= (0.0) + (1.1) + (2.2) + (3.3) = h + m + h + m = 2n \\ w &= (0.3) + (1.0) + (2.1) + (3.2) = l + m + m + j = 2n + 1 \end{aligned}$$

---

22. En récapitulant tout ce qui précède, on voit donc que les caractères servant à reconnaître si un nombre premier réel appartient aux classes A. B, C, D, lorsque le module p est de la forme $4n + 1$ et que $a + bi$ est un facteur complexe primaire de p, se laissent exprimer de la manière suivante:

Le nombre premier $P = 8n + 1$ appartient à:

A	pour $a \equiv 0$,	$b \equiv a\alpha$	mod. P.	Nombre des $\alpha' = 2n - 1$
B	„	$b \equiv a\beta$		„ „ $\beta' = 2n$
C	„	$b \equiv a\gamma$		„ „ $\gamma' = 2n$
D	„	$b \equiv a\delta$		„ „ $\delta' = 2n$

Le nombre premier $P = 8n + 5$ appartient à:

A	pour	$b \equiv a\alpha$	mod. P.	Nombre des $\alpha' = 2n + 1$
B	„	$b \equiv a\beta$		„ „ $\beta' = 2n + 1$
C	„	$b \equiv \alpha\gamma$ $a \equiv 0$		„ „ $\gamma' = 2n$
D	„	$b \equiv a\delta$		„ „ $\delta' = 2n + 1$

Le nombre premier $-Q = -(8n + 3)$ appartient à:

A	pour	$b \equiv a\alpha$	mod. Q.	Nombre des $\alpha' = 2n + 1$
B	„	$b \equiv a\beta$	„	„ „ $\beta' = 2n + 1$
C	„	$b \equiv a\gamma, a \equiv 0$	„	„ „ $\gamma' = 2n$
D	„	$b \equiv a\delta$	„	„ „ $\delta' = 2n + 1$

Le nombre premier $-Q = -(8n + 7)$ appartient à:

A	pour	$b \equiv a\alpha, a \equiv 0$	mod. Q.	Nombre des $\alpha' = 2n + 1$
B	„	$b \equiv a\beta$	„	„ „ $\beta' = 2n + 1$
C	„	$b \equiv a\gamma$	„	„ „ $\gamma' = 2n + 1$
D	„	$b \equiv a\delta$	„	„ „ $\delta' = 2n + 1$

Je citerai encore les remarques suivantes de Gauss (Art. 28), dont la démonstration, après tout ce qui précède, n'offre pas la moindre difficulté.

1. Le nombre 0 appartient toujours aux α, et les nombres $-\alpha$, $-\beta$, γ, $-\delta$, appartiennent (mod. m) respectivement aux α', δ', γ' et δ'.

2. Pour $P = 8n + 1$, $Q = (8n + 7)$, les valeurs de $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ (mod. m) appartiennent respectivement aux α' δ', γ', β'; et pour $P = 8n + 5$, $Q = (8n + 3)$, ces valeurs appartiennent respectivement aux γ', β', α', δ'.

Résidus cubiques.

23. En passant aux résidus cubiques, il est nécessaire de rappeler quelques points de la théorie des nombres entiers de la forme $a + b\varrho$; ϱ est ici une racine cubique complexe de l'unité, de sorte qu'on a: $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$.

Dans cette théorie, comme on le sait, il existe au sujet de la divisibilité des nombres, de leur décomposition en facteurs premiers, de l'existence de racines primitives des nombres premiers, etc., des théorèmes tout à fait analogues à ceux que présente la théorie ordinaire des nombres réels; la grande majorité des recherches contenues dans les quatre premières sections des *Disquisitiones arithmeticae* peuvent être étendues, presque sans changement, à la théorie des nombres entiers $a + b\varrho$.

Le produit de deux nombres conjugués $a + b\varrho$, $a + b\varrho^2$,

$$(a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^2 - ab + b^2,$$

s'appelle la *norme* du nombre $a + b\varrho$ et sera toujours indiqué par μ.

Le nombre 3 n'est pas un nombre premier dans cette théorie, car

$$3 = (1 - \varrho)(1 - \varrho^2) = -\varrho^2(1 - \varrho)^2.$$

Comme nombres premiers, outre $1 - \varrho$, se présentent dans cette théorie:

premièrement les nombres premiers réels de la forme $3n - 1$; la norme est alors $= (3n - 1)^2$;

secondement les facteurs premiers complexes des nombres premiers réels de la forme $3n + 1$. Ce nombre premier réel est alors en même temps la norme du facteur premier complexe. On a, par exemple: $7 = (2 + 3\varrho)(2 + 3\varrho^2) = (2 + 3\varrho)(-1 - 3\varrho)$.

Les nombres premiers $2 + 3\varrho$, $-1 - 3\varrho$ ont tous les deux le nombre 7 pour norme.

Dans chacun de ces deux cas la norme est donc de la forme $3k + 1$.

Ensuite, il suffit de considérer des nombres premiers *primaires*, ce mot étant pris ici dans la signification que lui donne Eisenstein (*Journ.* de Crelle, XXVII, p. 301), de sorte que $a + b\varrho$ sera dit primaire lorsqne $a + 1$ et b sent tous les deux divisibles par 3. Les nombres premiers réels de la forme $3n - 1$ doivent donc être pris positifs pour être primaires.

Soit donc M un nombre premier primaire, μ la norme de la forme $3n + 1$. Un système complet de résidus incongrus, non divisibles par le module M, se compose alors de $\mu - 1 = 3n$ nombres. Ces nombres peuvent être rapportés à 3 classes, comprenant chacune n nombres, suivant que leur puissance $\frac{\mu - 1}{3}$ est congrue, d'après le module M, avec 1, ϱ ou ϱ^2. Cette distribution peut être représentée ainsi:

$$\begin{array}{llll} A & \alpha, & \alpha', & \alpha'' \ldots \\ B & \beta, & \beta', & \beta'' \ldots \\ C & \gamma, & \gamma', & \gamma'' \ldots \end{array}$$

où l'on a donc:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1, \qquad \beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho, \qquad \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho^2 \text{ mod. } M.$$

Le caractère cubique des nombres α, α', α'', .. est $= 0$, celui des nombres β, β' .. $= 1$, celui des nombres γ, γ' .. $= 2$.

Il sera d'ailleurs facile aussi de faire usage du symbole d'Eisenstein et d'écrire par conséquent:

$$\left[\frac{\alpha}{M}\right] = 1, \qquad \left[\frac{\beta}{M}\right] = \varrho, \qquad \left[\frac{\gamma}{M}\right] = \varrho^2.$$

Il s'agit maintenant, en premier lieu, de déterminer le caractère cubique de $1 - \varrho$, ou la valeur du symbole $\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]$.

L'addition de l'unité à tous les nombres de A, B, C donne naissance aux 3 groupes de nombres A', B', C'':

$$\begin{array}{ll} A' & \alpha+1, \ \alpha'+1, \ \alpha''+1 \ .. \\ B' & \beta+1, \ \beta'+1, \ \beta''+1 \ .. \\ C'' & \gamma+1, \ \gamma'+1, \ \gamma''+1 \ .. \end{array}$$

et je représente par (0.0), (0.1), (0,2) les quotités des nombres de A' qui sont respectivement congrus avec des nombres de A, B, C; par (1.0), (1.1), (1.2) les quotités des nombres de B' qui sont respectivement congrus avec des nombres de A, B, C; enfin par (2.0), (2.1), (2.2) les quotités des nombres de C' qui sont respect. congrus avec des nombres A, B, C.

Tous ces nombres peuvent être réunis dans le schéma S:

$$\begin{array}{ccc} (0.0) & (0.1) & (0.2) \\ (1.0) & (1.1) & (1.2) \\ (2.0) & (2.1) & (2.2) \end{array}$$

et avec la détermination de ces nombres est aussi trouvé immédiatement le caractère cubique de $1-\varrho$. Car les congruences manifestement identiques:

$$(x-\alpha)\ (x-\alpha')\ (x-\alpha'')\ ..\equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-1 \text{ mod. } M.$$

$$(x-\beta)\ (x-\beta')\ (x-\beta'')\ ..\equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho$$

$$(x-\gamma)\ (x-\gamma')\ (x-\gamma'')\ ..\equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho^2$$

donnent pour $x=-1$, vu que $\frac{\mu-1}{3}$ est pair (sauf pour $M=2$, cas qui doit être excepté):

$$(\beta+1)\ (\beta'+1)\ (\beta''+1)\ ..\equiv 1-\varrho \text{ mod. } M$$
$$(\gamma+1)\ (\gamma'+1)\ (\gamma''+1)\ ..\equiv 1-\varrho^2,$$

d'où il suit immédiatement:

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{(1.1)+2(1.2)}$$

$$\left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{(2.1)+2(2.2}$$

---

25. Le nombre — 1 appartient, comme cube parfait, à la classe A, et les nombres α et $-\alpha$, β et $-\beta$, γ et γ entrent à la fois dans les classes A, B, C.

A l'aide de cette remarque, il est facile de voir que

le signe	représente le nombre des solutions de:
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M$
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$
(2.2)	$\gamma + \gamma + 1 \equiv 0$

de sorte qu'on a:

$$(0.1) = (1.0), \ (0.2) = (2.0), \ (1.2) = (2.1).$$

Si $xy = 1$ mod. M et que x appartienne à A, il est évident que y appartient également à A: mais lorsque x appartient à B ou à C, y appartient respectivement à C ou à B, ce qu'on peut exprimer en écrivant:

$$\alpha\alpha' \equiv 1, \quad \beta\gamma \equiv 1 \text{ mod. } M.$$

De

$$\gamma(\alpha + \beta + 1) \equiv \gamma' + 1 + \gamma$$
$$\beta(\alpha + \gamma + 1) \equiv \beta' + 1 + \beta$$

on conclut aux relations:

$$(0.1) = (2.2), \quad (0.2) = (1.1),$$

de sorte que le schéma S a cette forme:

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j. \end{matrix}$$

Comme -1 appartient à A, et par conséquent 0 à A', mais que, sauf ce nombre 0 de A', tous les nombres de A', B', C' sont congrus avec un nombre de A, B ou C, on a:

$$h + j + k = n - 1$$
$$j + k + l = n.$$

Enfin, la considération du nombre des solutions de la congruence

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \quad \text{mod. } M,$$

où α, β, γ doivent être choisis respectivement dans les classes A, B, C, fournit encore une relation entre h, j, k, l. En effet, si l'on prend d'abord pour α les nombres de A, on obtient pour le nombre en question:

$$hl + jj + kk.$$

En prenant, au contraire, pour β successivement tous les nombres de B, on trouve pour ce même nombre:

$$jk + kl + lj,$$

donc

$$0 = hl + jj + kk - jk - kl - lj.$$

---

26. En éliminant h de cette dernière équation, à l'aide de $h = l - 1$, on a

$$0 = l(l - 1) + jj + kk - jk - kl - lj,$$

équation qui, multipliée par 4, prend, à cause de

$$(j+k)^2 + 3(j-k)^2 = 4(jj + kk - jk),$$

la forme

$$0 = 4l^2 - 4l + (j+k)^2 + 3(j-k)^2 - 4l(k+j),$$

ou bien, en ayant égard à $l = n - (j+k)$ et en multipliant par 9:

$$36n = 36l^2 + 9(j+k)^2 + 27(j-k)^2 - 36l(j+k) + 36(j+k)$$

et

$$24n = 24(j+k+l);$$

donc, par soustraction,

$$12n = 36l^2 + 9(j+k)^2 + 27(j-k)^2 - 36l(j+k) + 12(j+k) - 24l$$

ou

$$12n + 4 = 4\mu = (6l - 3j - 3k - 2)^2 + 27(j-k)^2.$$

Si l'on pose

$$A = 6l - 3j - 3k - 2$$
$$B = 3j - 3k,$$

on a donc

$$4\mu = A^2 + 3B^2,$$

et h, j, k, l, se laissent alors facilement exprimer au moyen de A et B, de la manière suivante:

$$9h = 3n + A - 7$$
$$18j = 6n - A + 3B - 2$$
$$18k = 6n - A - 3B - 2$$
$$9l = 3n + A + 2.$$

Il reste encore à déterminer A et B, et pour cela deux cas doivent être distingués.

---

27. Si, en premier lieu, M est réel et de la forme $3n-1$, donc $\mu = M^2$, il suit de

$$4\mu = 4M^2 = A^2 + 3B^2$$

que A est $= \pm 2M$, $B = 0$. Car, si B n'était pas $= 0$, on pourrait déterminer un nombre entier x de telle sorte que

$$A \equiv Bx \text{ mod. } M,$$

d'où résulterait

$$A^2 \equiv -3B^2 \equiv B^2 x^2 \text{ mod. } M,$$

donc

$$x^2 \equiv -3 \text{ mod. } M,$$

ce qui est impossible, puisqu'on sait que -3 est non-résidu de M.

On a donc indubitablement $B = 0$, $A = \pm 2M$. Quant au signe de A, il se déduit immédiatement de la remarque que A est $\equiv 1$ mod. 3, et M, comme nombre premier *primaire*, $\equiv -1$ mod. 3; on a donc:

$$A = 2M$$

et finalement

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2M - 7 \\ 9j = 9k &= 3n - M - 1 \\ 9l &= 3n + 2M + 2. \end{aligned}$$

---

28. Soit, en second lieu, $M = a + b\varrho$ un facteur complexe primaire d'un nombre premier réel p de la forme $3n + 1$; on a alors:

$$4\mu = (2a - b)^2 + 3b^2 = A^2 + 3B^2$$

et, puisque $a + b\varrho$ est primaire, $a + 1 \equiv b \equiv 0$ mod. 3.

B aussi est maintenant divisible par 3, et comme il est facile de démontrer que 4μ ne peut être représenté que d'une seule manière par la somme d'un carré et du multiple par 27 d'un second carré, il s'ensuit:

$$A = 2a - b, \quad B = \pm b.$$

Le signe de A, en effet, est de nouveau déterminé par $A \equiv 1$ mod. 3.

Quant au signe de B, il s'obtient par la considération suivante: si z parcourt tous les nombres de A, B et C, on trouve, exactement de la même manière qu'au paragraphe 12:

$$\Sigma (z^3 + 1)^{\frac{\mu - 1}{3}} \equiv -2 \equiv 3 (h + j\varrho + k\varrho^2) \text{ mod. } M$$

ou

$$-2 \equiv 3 ((h - k) + \varrho (j - k)),$$

puis, en exprimant h, j, k par A et B, et écrivant pour A la valeur $2a - b$, après quelques réductions:

$$0 \equiv 2a - b + B + 2B\varrho \text{ mod. } (M = a + b\varrho),$$

d'où il résulte: $B = b$.

A et B étant ainsi trouvés, on a

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2a - b - 7 \\ 9j &= 3n - a + 2b - 1 \\ 9k &= 3n - a - b - 1 \\ 9l &= 3n + 2a - b + 2 \end{aligned}$$

---

29. D'après le paragraphe 24, le caractère cubique de $1 - \varrho$ suivant le module 3 est:

$$\equiv (1.1) + 2\,(1.2) \equiv k - l$$

et celui de $1 - \varrho^2$:

$$\equiv (2.1) + 2\,(2.2) \equiv l - j;$$

lorsque M est réel de la forme $3n - 1$, on a donc, d'après le paragraphe 27:

$$\text{Caractère } (1 - \varrho) \equiv -\frac{M + 1}{3}$$

$$\text{»} \quad (1 - \varrho^2) \equiv +\frac{M + 1}{3},$$

ou bien:

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{-\frac{M+1}{3}}, \quad \left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{+\frac{M+1}{3}},$$

d'où il suit encore:

$$\left[\frac{3}{M}\right] = 1.$$

Quand, au contraire, $M = a + b\varrho$ est un facteur complexe d'un nombre premier réel de la forme $3n + 1$, on a, d'après les valeurs trouvées au paragraphe 28 :

$$\text{Caractère } (1-\varrho) \equiv \frac{1}{3}(-a-1)$$

$$\text{»} \quad (1-\varrho^2) \equiv \frac{1}{3}(a-b+1),$$

ou :

$$\left[\frac{1-\varrho}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{a+1}{3}}, \quad \left[\frac{1-\varrho^2}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{a-b+1}{3}}.$$

$$\left[\frac{3}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}.$$

Ces résultats ne diffèrent pas, au fond, de ceux donnés par Eisenstein dans le tome 28 du *Journal* de Crelle, p. 28 et suiv.

---

30. A l'égard du cas où le nombre premier M est un facteur d'un nombre premier réel p de la forme $3n + 1$, je présenterai encore les remarques suivantes.

Comme, dans $M = a + b\varrho$, a et b n'ont pas de diviseur commun, et que par conséquent b en $a - b$ sont aussi premiers

entre eux, on peut toujours trouver deux nombres entiers α et β satisfaisant à la relation

$$b\alpha + (a - b)\beta = 1,$$

et on a alors:

$$(a + b\varrho)(\alpha + \beta\varrho) = a\alpha - b\beta + \varrho,$$

donc:

$$\varrho \equiv b\beta - a\alpha \text{ mod. } (M = a + b\varrho).$$

De la résulte immédiatement que tout nombre entier $c + d\varrho$ est congru suivant le module $a + b\varrho$ avec un nombre entier réel, lequel nombre réel peut être pris plus petit que le module $\mu = p$, de sorte que les nombres réels

$$0, 1, 2, 3 \ldots \mu - 1$$

forment un système complet de résidus. En divisant ces nombres réels (à l'exception de 0), suivant leur caractère cubique, en trois classes:

$$\begin{array}{llll} A & \alpha & \alpha' & \alpha'' \ldots \\ B & \beta & \beta' & \beta'' \ldots \\ C & \gamma & \gamma' & \gamma'' \ldots, \end{array}$$

et en désignant par f le nombre réel qui est $\equiv \varrho$ (mod. M), on a donc:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1 \equiv \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f \equiv \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2 \equiv 0 \text{ mod. } M = (a + b\varrho),$$

et comme

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1, \; \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f, \; \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2$$

sont des nombres réels, ils doivent être divisibles non seulement par $a + b\varrho$, mais aussi par le module

$$p = \mu = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2),$$

de sorte qu'on a:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \text{ mod. } (p = \mu)$$
$$\beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f$$
$$\gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f^2 .$$

On voit donc que la classification des nombres

$$1, 2, 3.., p-1,$$

à l'aide de ces trois dernières congruences, coïncide avec celle qui a pour base leur caractère cubique par rapport au module $a + b\varrho$.

Le résultat

$$\left[\frac{3}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

peut être énoncé ainsi: le nombre 3 appartient à la classe A, B ou C, suivant que $-\frac{1}{3}b$ est de la forme $3m$, $3m+1$ ou $3m+2$.

Voici quelques exemples.

$p = 7 \quad a = 2 \quad b = 3 \quad f = 4$ — Schéma S.

A	1, 6	$h\ j\ k$	0 1 0
B	2, 5	$j\ k\ l$	1 0 1
C	3, 4	$k\ l\ j$	0 1 1

$p = 13 \quad a = -1 \quad b = 3 \quad f = 9$

A	1, 5, 8, 12	0 2 1
B	4, 6, 7, 9	2 1 1
C	2, 3, 10, 11	1 1 2

$p = 19 \quad a = 5 \quad b = 3 \quad f = 11$

A	1, 7, 8, 11, 12, 18	2 2 1
B	4, 6, 9, 10, 13, 14	2 1 3
C	2, 3, 5, 14, 16, 17	1 3 2

$p = 31 \quad a = 5 \quad b = 6 \quad f = 25$

A	1, 2, 4, 8, 15, 16, 23, 27, 29, 30	3 4 2
B	3, 6, 7, 12, 14, 17, 19, 24, 25, 28	4 2 4
C	5, 9, 10, 11, 13, 18, 20, 21, 22, 26	2 4 4

$p = 37 \quad a = -4 \quad b = 3 \quad f = 26$

A	1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36	2 5 4
B	2, 9, 12, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 25, 28, 35	5 4 3
C	3, 4, 5, 7, 13, 18, 19, 24, 30, 32, 33, 34	4 3 5

$p = 43 \quad a = -1 \quad b = 6 \quad f = 36$

A	1, 2, 4, 8, 11, 16, 21, 22, 27, 32, 35, 39, 41, 42	3 6 4
B	3, 5, 6, 10, 12, 19, 20, 23, 24, 31, 33, 37, 38, 40	6 4 4
C	7, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 36	4 4 6

$p = 61 \quad a = 5 \quad b = 9 \quad f = 13$

A	1, 3, 8, 9, 11, 20, 23, 24, 27, 28, 33, 34, 37,	6 8 5
	38, 41, 50, 52, 53, 58, 60	8 5 7
B	4, 10, 12, 14, 17, 19, 25, 26, 29, 30, 31, 32,	5 7 8
	35, 36, 42, 44, 47, 49, 51, 57	
C	2, 5, 6, 7, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 39, 40, 43,	
	45, 46, 48, 54, 55, 56, 59	

La question de la présence du nombre 3 dans l'un des groupes *A*, *B*, *C* étant tranchée d'avance, comme il vient d'être dit, on peut facilement, à l'aide de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus cubiques, établir les caractères nécessaires pour reconnaître aussi la présence d'autres nombres dans ces classes. Il suffit évidemment de considérer, à ce point de vue, les nombres premiers.

En ce qui concerne le nombre premier 2, ces caractères peuvent aussi être déduits sans le secours de la loi de réciprocité, ainsi que nous allons le faire voir.

---

31. Le nombre $p-1$ appartenant toujours à A, il en résulte immédiatement que 2 appartiendra à la classe A, B ou C suivant que $\frac{p-1}{2}$ appartient à la classe A, C ou B.

Les nombres h, k, j sont respectivement les nombres de solutions des congruences:

$$\alpha+\alpha'+1\equiv 0 \text{ mod. } p.$$
$$\beta+\beta'+1\equiv 0$$
$$\gamma+\gamma'+1\equiv 0,$$

et comme on peut échanger entre eux α et α', β et β', γ et γ', ces trois nombres sont pairs, à l'exception du premier, lorsque $\alpha=\alpha'=\frac{p-1}{2}$ appartient à A, ou à l'exception du second, lorsque $\beta=\beta'=\frac{p-1}{2}$ appartient à B, ou à l'exception du troisième, lorsque $\gamma=\gamma'=\frac{p-1}{2}$ appartient à C.

On voit donc que 2 appartient à la classe A, B ou C, suivant que, des trois nombres h, j, k, le premier, le second ou le troisième est impair.

Comme on a $p=3n+1$ (n pair) et, d'après le paragraphe 28,

$$9h=3n+2a-b-7$$
$$9j=3n-a+2b-7$$
$$9k=3n-a-b-1,$$

h est impair lorsque b est pair, j est impair lorsque a est pair, enfin k est impair lorsque a et b sont tous les deux impairs. Puisque a et b n'ont pas de diviseur commun, aucun autre cas n'est possible, et par conséquent 2 appartient à:

$$\begin{array}{lll} A & \text{lorsque } b\equiv 0 & \text{mod. } 2 \\ B & \quad\text{„}\quad a\equiv 0 & \text{mod. } 2 \\ C & \quad\text{„}\quad a\equiv b\equiv 1 & \text{mod. } 2 \end{array}$$

32. En ce qui regarde la présence de 5 dans l'une des trois classes, on a, d'après la loi de réciprocité cubique,

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a+b\varrho}{5}\right],$$

car 5 est aussi un nombre premier dans la théorie des nombres entiers $a + b\varrho$.

Pour $a \equiv 0$ mod. 5, on a donc:

$$\left[\frac{5}{a+\mathrm{b}\delta}\right] = \left[\frac{b\varrho}{5}\right] = \left[\frac{\varrho}{5}\right] = \varrho^8 = \varrho^2$$

et par conséquent 5 appartient à C.

Lorsque a n'est pas divisible par 5, on peut déterminer x dans

$$b \equiv a x \text{ mod. } 5,$$

et x peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4: on a

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1+x\varrho)}{5}\right] = \left[\frac{1+x\varrho}{5}\right]$$

et l'on trouve ensuite:

$$x = 0 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 1 \qquad \left[\frac{4}{a+b\varrho}\right] = \varrho$$

$$x = 2 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 3 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \varrho^2$$

$$x = 4 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \varrho,$$

de sorte que 5 appartient à

$$\begin{array}{lll} A & \text{lorsque} & b \equiv 0, \quad b \equiv 2\,a \text{ mod. } 5 \\ B & \quad " & b \equiv a, \quad b \equiv 4\,a \\ C & \quad " & b \equiv 3\,a, a \equiv 0. \end{array}$$

Pour juger de la classe de 7, on a :

$$\left[\frac{a + b\,\varrho}{7}\right] = \left[\frac{2 + 3\,\varrho}{a + b\,\varrho}\right] \quad \left[\frac{2 + 3\,\varrho^2}{a + b\,\varrho}\right],$$

puis, d'après la loi de réciprocité,

$$\left[\frac{7}{a + b\,\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\,\varrho}{2 + 3\,\varrho}\right] \quad \left[\frac{a + b\,\varrho}{2 + 3\,\varrho^2}\right].$$

Pour $a \equiv 0$ mod. 7, attendu qu'on a, en général

$$\left[\frac{\alpha + \beta\,\varrho}{a + b\,\varrho}\right] \quad \left[\frac{\alpha + \beta\,\varrho^2}{a + b\,\varrho^2}\right] = 1,$$

il vient

$$\left[\frac{7}{a + b\,\varrho}\right] = \left[\frac{\varrho}{2 + 3\,\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{2 + 3\,\varrho^2}\right] = \left[\frac{2 + 3\,\varrho}{\varrho^2}\right] = \varrho^4 = \varrho,$$

de sorte que 7 appartient à B.

Lorsque a n'est pas divisible par 7, mais qu'on a

$$b \equiv a\,x \text{ mod. } 7,$$

il s'ensuit

$$\left[\frac{7}{a + b\,\varrho}\right] = \left[\frac{1 + x\,\partial}{2 + 3\,\varrho}\right] \quad \left[\frac{1 + x\,\varrho}{2 + 3\,\varrho^2}\right],$$

et x peut présenter les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,$$

mais non les valeurs $x = 3$ et $x = 5$, car celles-ci rendraient

$$p = a^2 - a\,b + b^2 \equiv a^2\,(1 - x + x^2)$$

divisible par 7.

On trouve maintenant:

$$x=0 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=1$$

$$x=1 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2$$

$$x=2 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=1$$

$$x=4 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho$$

$$x=6 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2,$$

de sorte que 7 appartient à

A lorsque $b\equiv 0$, $b\equiv 2a$ mod. 7
B „ $b\equiv 4a$, $a\equiv 0$
C „ $b\equiv a$, $b\equiv 6a$

De la même manière, ou par induction, on reconnaîtra que 11 appartient à

A pour $b\equiv 0$, $b\equiv 2a$, $b\equiv 4a$, $b\equiv 5a$ mod. 11
B „ $b\equiv 3a$, $b\equiv 6a$, $b\equiv 9a$, $a\equiv 0$
C „ $b\equiv a$, $b\equiv 7a$, $b\equiv 8a$, $b\equiv 10a$

13 appartient à

A pour $b\equiv 0$, $b\equiv 2a$, $b\equiv 3a$, $b\equiv 8a$ mod. 13
B „ $b\equiv a$, $b\equiv 6a$, $b\equiv 11a$, $b\equiv 12a$
C „ $b\equiv 5a$, $b\equiv 7a$, $b\equiv 9a$, $a\equiv 0$

17 appartient à mod. 17

A pour $b\equiv 0$, $b\equiv a$, $b\equiv 2a$, $b\equiv 9a$, $b\equiv 16a$, $a\equiv 0$
B „ $b\equiv 3a$, $b\equiv 7a$, $b\equiv 8a$, $b\equiv 12a$, $b\equiv 13a$, $b\equiv 14a$
C „ $b\equiv 4a$, $b\equiv 5a$, $b\equiv 6a$, $b\equiv 10a$, $b\equiv 11a$, $b\equiv 15a$

19 appartient à mod. 19

A pour $b \equiv 0,\ b \equiv a,\ b \equiv 2a,\ b \equiv 10a, b \equiv 18a, a \equiv 0$
B „ $b \equiv 5a,\ b \equiv 11a,\ b \equiv 13a,\ b \equiv 14a, b \equiv 16a, b \equiv 17a$
C „ $b \equiv 3a,\ b \equiv 4a,\ b \equiv 6a,\ b \equiv 7a,\ b \equiv 9a,\ b \equiv 15a$

23 appartient à mod. 23

A pour $b \equiv 0,\ b \equiv 2a, b \equiv 5a,\ b \equiv 6a,\ b \equiv 7a, b \equiv 8a, b \equiv 11a, b \equiv 15a$
B „ $b \equiv a, b \equiv 9a, b \equiv 13a, b \equiv 16a, b \equiv 17a, b \equiv 18a, b \equiv 19a, b \equiv 22a$
C „ $b \equiv 3a, b \equiv 4a, b \equiv 10a, b \equiv 12a, b \equiv 14a, b \equiv 20a, b \equiv 21a, a \equiv 0$

---

33. La considération de ces théorèmes particuliers donne lieu aux remarques suivantes.

Pour la commodité, les nombres premiers réels de la forme $3n - 1$, qui restent aussi nombres premiers dans la théorie complexe, seront désignés ici par Q, les nombres premiers de la forme $3n + 1$ par P.

1. Un nombre premier Q appartient, lorsque $a \equiv 0$ mod. Q, aux classes A, B, C suivant que $\frac{Q+1}{3}$ est de la forme $3m$, $3m + 1$, $3m + 2$.

2. Un nombre premier P appartient, lorsque $a \equiv 0$ mod. P, aux classes A, B, C suivant que $\frac{P-1}{6}$ est de la forme $3m$, $3m + 1$, $3m + 2$.

3. Dans les cas $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$, le nombre premier P ou Q appartient toujours à la classe A.

4. Quand le nombre premier appartient à A pour $a \equiv 0$, il appartient aussi à A pour $b \equiv a$ et pour $b \equiv -a$. Si, au contraire, le nombre premier fait partie de la classe B ou C lorsque $a \equiv 0$, il fait partie, pour $b \equiv a$ et $b \equiv -a$, de la classe C ou B.

5. En général, les critères sont de la forme suivante:

Si a est $\equiv 0$, le nombre premier appartient à une classe déterminée.

Si a n'est pas $\equiv 0$, on a $b \equiv ax$, et pour chaque valeur de x le nombre premier appartient à une classe déterminée, de sorte qu'on peut distribuer les valeurs de x en 3 groupes, tels que

pour $b \equiv a\alpha$, le nombre premier appartienne à A
„ $b \equiv a\beta$, „ „ „ „ „ B
„ $b \equiv a\gamma$, „ „ „ „ „ C

Il faut encore ajouter le cas $a \equiv 0$, qui correspond aussi à une classe déterminée.

Or, le nombre total des congruences qu'on trouve de cette manière est le même pour chacune des trois classes et $= \frac{Q+1}{3}$ ou $= \frac{P-1}{3}$.

6. Lorsque x et y sont deux nombres satisfaisant à la congruence

$$x + y - xy \equiv 0,$$

et que x appartient à α, y appartient également à α. Mais si $x = \beta$ ou $= \gamma$, y appartient respectivement aux γ ou aux β.

Si $xy \equiv 1$ et que 1 appartienne aux α, on a:

pour $x = \alpha'$ $\quad y = \alpha''$
„ $x = \beta'$ $\quad y = \gamma'$
„ $x = \gamma'$ $\quad y = \beta'$.

Si $xy \equiv 1$ et $1 = \beta$, on a:

pour $x = \alpha$ $\quad y = \gamma$
„ $x = \beta'$ $\quad y = \beta''$
„ $x = \gamma'$ $\quad y = \alpha'$.

Si $xy \equiv 1$ et $1 = \gamma$, on a:

pour $x = \alpha$ $\quad y = \beta$
„ $x = \beta$ $\quad y = \alpha$
„ $x = \gamma$ $\quad y = \gamma'$.

34. Quant à la *démonstration* de ce qui vient d'être dit, la remarque 5 est la seule qui demande quelques considérations nouvelles; tout le reste n'offre, après ce qui précède, aucune difficulté.

Je vais donc prouver d'une manière générale la vérité de cette remarque 5. Il faut pour cela distinguer les cas où le nombre premier est $=Q$ ou $=P$; commençons par le premier de ces cas, qui est de beaucoup le plus simple.

---

35. Lorsque le nombre premier Q est de la forme $3n-1$, et qu'il reste par conséquent premier aussi dans la théorie des nombres complexes de la forme $a+b\varrho$, on a d'après la loi de réciprocité:

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{Q}\right].$$

Soit d'abord $a\equiv 0$ mod. Q; dans ce cas

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{b\varrho}{Q}\right]=\left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho^{\frac{Q^2-1}{6}}.$$

Mais

$$\frac{Q+1}{3}\times(Q-2)$$

est un multiple de 3, et

$$\frac{Q^2-1}{3}-\frac{(Q+1)(Q-2)}{3}=\frac{Q+1}{3};$$

on a par conséquent

$$\text{pour } a\equiv 0 \text{ mod. } Q,\ \left[\frac{a+b\varrho}{Q}\right]=\varrho^{\frac{Q+1}{3}},$$

d'où ressort l'exactitude de ce qui a été dit au paragraphe 33 en 1.

Si a n'est pas divisible par Q, x est complètement déterminé par

$$b \equiv a x \ \text{mod.}\ Q$$

et

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1+x\varrho)}{Q}\right] = \left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right],$$

ce qui montre déjà que la classe à laquelle appartient Q dépend uniquement de x; pour x on peut d'ailleurs avoir évidemment les nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ..\ Q-1\ .$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette question: parmi les Q quantités

$$\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right] \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ ..\ Q-1,$$

combien y en a-t-il d'égales à 1, combien d'égales à ϱ, combien d'égales à ϱ^2 ? Nous considérons un système complet de nombres non divisibles par le module, système pour lequel on peut prendre les nombres

$$\alpha + \beta\varrho \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ ..\ Q-1,$$

la combinaison $\alpha = 0$, $\beta = 0$ devant seule être omise. Si nous rapportons ces $Q^2 - 1$ nombres d'après leur caractère cubique à 3 groupes A, B, C,

$$\begin{array}{ll} A & \alpha_0 + \beta_0\varrho\ .. \\ B & \alpha_1 + \beta_1\varrho\ .. \\ C & \alpha_2 + \beta_2\varrho\ .., \end{array}$$

chacun de ces groupes contient

$$\frac{Q^2-1}{3} = (Q-1) \times \frac{Q+1}{3}$$

nombres, quotité qui est donc un multiple de $Q-1$: et les nombres réels qui correspondent à $\beta = 0$, savoir

$$1,\ 2,\ 3\ ..\ Q-1,$$

appartiennent tous à A, d'où il découle que lorsque $\alpha + \beta \varrho$ fait partie d'une certaine classe, les nombres congrus avec

$$1(\alpha + \beta \varrho),\ 2(\alpha + \beta \varrho), \ldots (Q-1)(\alpha + \beta \varrho)$$

font aussi partie de cette classe. Si α n'est pas égal à zéro, les nombres

$$\alpha \quad 2\alpha \quad 3\alpha \ldots \quad (Q-1)\alpha,$$

pris dans un certain ordre, sont congrus, suivant le module Q, avec

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots \quad Q-1.$$

Les nombres d'une classe, chez qui la partie réelle n'est pas $= 0$, peuvent donc être divisés en groupes de $Q-1$ nombres, de telle sorte que dans chaque groupe se trouve *un* nombre de la forme $1 + x\varrho$.

Il ressort de là que les quotités des nombres $1 + x\varrho$ qui rendent $\left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right] = 1, = = \varrho, = \varrho^2$, sont

$$\frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3} \text{ lorsque } \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = 1,$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3} \text{ lorsque } \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = \varrho,$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3} \text{ lorsque } \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = \varrho^2,$$

et comme, en outre, nous avons trouvé ci-dessus que, pour

$$a \equiv 0 \text{ mod. } Q,$$

Q appartient aux classes A, B ou C suivant que $\left[\frac{\varrho}{Q}\right]$ est $= 1$, $= \varrho$ on $= \varrho^2$, l'énoncé 5 du paragraphe 33 se trouve entièrement démontré pour le cas où le nombre premier est de la forme $3n - 1$.

36. Lorsque le nombre premier dont on veut reconnaître la présence dans les classes A, B, C est de la forme $P = 3n + 1$, il s'agit de déterminer la valeur de

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right];$$

P n'étant pas un nombre premier dans la théorie complexe, on doit, avant de pouvoir appliquer la loi de réciprocité, décomposer P en ses facteurs premiers primaires

$$P = (A + B\varrho)\,(A + B\varrho^2),$$

et on a alors

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{A + B\varrho}{a + b\varrho}\right] \left[\frac{A + B\varrho^2}{a + b\varrho}\right].$$

Donc:

pour $a \equiv 0 \text{ mod. } P$,

$$\left[\frac{a + b\varrho}{P}\right] = \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho^{2\frac{P-1}{3}} = \varrho^{\frac{P-1}{6}};$$

pour $ax \equiv b \text{ mod. } P$,

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right].$$

Du premier résultat, pour $a \equiv 0$, ressort la justesse de la seconde remarque du paragr. 33.

Comme P est de la forme $3n + 1$, la congruence

$$x^3 \equiv 1 \text{ mod. } P$$

a trois racines différentes, 1, f, g (où $f \equiv g^2$).

Les deux valeurs $-f$, $-g$ ne peuvent maintenant être $= x$ dans la congruence

$$b \equiv ax,$$

car de $b \equiv -af$ il résulterait

$$a^2 - ab + b^2 \equiv a^2(1 + f + f^2) \equiv 0 \text{ mod. } P,$$

de sorte que le nombre premier

$$p = a^2 - ab + b^2$$

serait divisible par P.

D'après cela, les valeurs que x peut prendre sont

$$0, 1, 2, 3 \ldots P-1,$$

sauf omission des nombres $P-f$ et $P-g$. Leur nombre est donc $P-2$, et il s'agit de rechercher pour combien de ces $P-2$ valeurs de x l'expression

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right] \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

acquiert les valeurs 1, ϱ et ϱ^2.

Je fais remarquer encore que

$$\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right] = \varrho^{\frac{P-1}{3}}$$

et que, pour $a \equiv 0$ mod. P, on avait:

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{2\frac{P-1}{3}}.$$

Ainsi, lorsque ϱ, pour le module $A+B\varrho$, appartient à la classe A, B ou C, il arrive simultanément que P, pour le module $a+b\varrho$ (ou, ce qui est la même chose, pour le module réel p), appartient à la classe A, C ou B.

---

37. Un nombre arbitraire $\alpha+\beta\varrho$ étant donné, on peut toujours trouver un autre nombre qui soit congru avec lui suivant le module $A+B\varrho$ et dont la partie réelle soit $=1$.

La division d'un système complet de nombres non divisibles par le module, en trois classes, d'après leur caractère cubique, peut donc être représentée de cette manière:

module $A + B\varrho$

$$\begin{array}{llll} A & \alpha = 1 + a\varrho & \alpha' = 1 + \alpha'\varrho & \alpha'' = 1 + a''\varrho \,.. \\ B & \beta = 1 + b\varrho & \beta' = 1 + b'\varrho & \beta'' = 1 + b''\varrho \,.. \\ C & \gamma = 1 + c\varrho & \gamma' = 1 + c'\varrho & \gamma'' = 1 + c''\varrho \,.., \end{array}$$

et comme, de

$$(1 + a\varrho)^{\frac{P-1}{3}} - \varrho^k \equiv (A + B\varrho)(C + D\varrho),$$

il suit

$$(1 + a\varrho^2)^{\frac{P-1}{3}} - \varrho^{2k} = (A + B\varrho^2)(C + D\varrho^2),$$

la classification pour le module $A + B\varrho^2$ peut simultanément être représentée par:

module $A + B\varrho^2$

$$\begin{array}{llll} A & 1 + a\varrho^2 & 1 + a'\varrho^2 & 1 + a''\varrho^2 \,.. \\ B & 1 + c\varrho^2 & 1 + c'\varrho^2 & 1 + c''\varrho^2 \,.. \\ C & 1 + b\varrho^2 & 1 + b'\varrho^2 & 1 + b''\varrho^2 \,.. \end{array}$$

Les nombres a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' .. forment, dans leur ensemble, tous les nombres du groupe

$$0, 1, 2, 3 \,..\, P - 1,$$

à l'exception du seul nombre qui est $\equiv -\varrho^2$ mod. $A + B\varrho$ et qui est congru suivant le module P avec un des nombres $-f$, $-g$. Les cas où l'on a

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = 1$$

sont évidemment:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = 1 \text{ et simultanément } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + A\varrho^2}\right] = 1$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho \text{ et simultanément } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho^2$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho^2 \text{ et simultanément } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho$$

Or, $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]$ est $=1$ pour $x=a,\ a',\ a''\ldots$, et pour qu'on sait en même temps $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1$, il faut donc que $1+a\varrho$ soit congru suivant le module $A+B\varrho^2$ avec un des nombres $1+a\varrho^2$, $1+a'\varrho^2\ldots$, c'est-à-dire:

$$1+a\varrho \equiv 1+a'\varrho^2 \text{ mod. } (A+B\varrho^2);$$

réciproquement, s'il est satisfait à cette congruence, on a:

$$\left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho}\right]=1,\ \left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1.$$

Le nombre des fois où ce cas se présente est donc égal au nombre des solutions de la congruence ci-dessus. En raisonnant d'une manière analogue pour les deux autres cas:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho,\ \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^2$$

et

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2,\ \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho,$$

on trouve que le nombre des fois où

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\ \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

devient égal à 1, est représenté par la somme des nombres de solutions des trois congruences:

$$1+a\varrho \equiv 1+a'\varrho^2 \text{ mod. } A+B\varrho^2$$
$$1+b\varrho \equiv 1+b'\varrho^2$$
$$1+c\varrho \equiv 1+c'\varrho^2.$$

On reconnaîtra, de même, que le nombre des fois où l'expression précédente devient $=\varrho$ et $=\varrho^2$ est exprimé, dans le premier cas, par la somme des nombres de solutions des congruences:

$$\begin{aligned} 1 + b\varrho &\equiv 1 + a\varrho^2 \text{ mod. } A + B\varrho^2 \\ 1 + c\varrho &\equiv 1 + b\varrho^2 \\ 1 + a\varrho &\equiv 1 + c\varrho^2, \end{aligned}$$

et, dans le second cas, par la somme des nombres de solutions des congruences:

$$\begin{aligned} 1 + c\varrho &\equiv 1 + a\varrho^2 \text{ mod. } A + B\varrho^2 \\ 1 + a\varrho &\equiv 1 + b\varrho^2 \\ 1 + b\varrho &\equiv 1 + c\varrho^2. \end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer directement les développements des paragr. 25—28, il est un peu plus facile de considérer seulement des congruences suivant le module $A + B\varrho$, de sorte que, remplaçant partout dans les formules précédentes ϱ par ϱ^2, et désignant par t, u, v les nombres de fois que

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \times \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

est respectivement $= 1$, $= \varrho$, $= \varrho^2$, nous écrirons:
$t =$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} 1 + a\varrho^2 &\equiv 1 + a'\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ 1 + b\varrho^2 &\equiv 1 + b'\varrho \quad\quad " \\ 1 + c\varrho^2 &\equiv 1 + b'\varrho \quad\quad " \end{aligned}$$

$u =$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} 1 + b\varrho^2 &\equiv 1 + a\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ 1 + c\varrho^2 &\equiv 1 + b\varrho \quad\quad " \\ 1 + a\varrho^2 &\equiv 1 + c\varrho \quad\quad " \end{aligned}$$

$v =$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} 1 + c\varrho^2 &\equiv 1 + a\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ 1 + a\varrho^2 &\equiv 1 + b\varrho \quad\quad " \\ 1 + b\varrho^2 &\equiv 1 + c\varrho \quad\quad " \end{aligned}$$

---

38. A ce sujet, il convient encore de remarquer ce qui suit. Parmi les nombres $a\ b\ c\ a'\ b'\ c'$ ne se trouve pas l'un des deux nombres $-f$, $-g$. Supposons que ce soit $-f$, de sorte que $-g$ s'y trouve. Il n'en est alors pas moins évident que cette valeur $-g$ ne peut se présenter nulle part dans l'une des congruences ci-dessus; car, de $1 + a\varrho^2 \equiv 1 + a'\varrho$ ou $a\varrho^2 \equiv a'\varrho$ par exemple, il suivrait, pour $a \equiv -g$, $a' \equiv a\varrho \equiv -\varrho^2 \equiv -f$ (puisque $f \equiv \varrho^2$ et $g \equiv \varrho$ mod. $A + B\varrho$); or, la valeur $a' \equiv -f$ ne se présente pas. Comme, parmi les valeurs à prendre pour x, ne se trouvaient ni $-f$ ni $-g$, il en ressort avec évidence que les expressions ci-dessus données pour t, u et v sont réellement exactes, lorsque les nombres a, a', b, b', c, c', qui entrent dans les congruences, soit choisis de toutes les manières possibles dans les groupes $a, a', a'' \ldots b, b', b'', \ldots c, c', c'' \ldots$

En introduisant, au lieu de a, b etc., les nombres $\alpha \equiv 1 + a\varrho$, $\beta \equiv 1 + b\varrho$, on trouve, par exemple, que

$$a\varrho^2 \equiv a'\varrho \text{ se transforme en } \varrho(\alpha - 1) \equiv \alpha' - 1$$

ou

$$\alpha' - \varrho\alpha \equiv 1 - \varrho,$$

et en agissant de même avec les autres congruences, on obtient les expressions suivantes:

$t \equiv$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} \alpha' - \varrho\alpha &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta' - \varrho\beta &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \\ \gamma' - \varrho\gamma &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \end{aligned}$$

$u \equiv$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} \alpha - \varrho\beta &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta - \varrho\gamma &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \\ \gamma - \varrho\alpha &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \end{aligned}$$

$v \equiv$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} \alpha - \varrho\gamma &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta - \varrho\alpha &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \\ \gamma - \varrho\beta &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \end{aligned}$$

Dans le premier membre de ces congruences le signe — peut partout être remplacé par $+$, puisque deux nombres λ et $-\lambda$ appartiennent toujours à la même classe. Ce remplacement étant effectué, et toutes les congruences étant en outre multipliées par le nombre entier $\frac{P-1}{1-\varrho} = \frac{3n}{1-\varrho} = n(1-\varrho^2)$, il vient:

$t =$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} \alpha' + \varrho\alpha + 1 &\equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta' + \varrho\beta + 1 &\equiv 0 \quad " \\ \gamma' + \varrho\gamma + 1 &\equiv 0 \quad " \end{aligned}$$

$u =$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} \alpha + \varrho\beta + 1 &\equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta + \varrho\gamma + 1 &\equiv 0 \quad " \\ \gamma + \varrho\alpha + 1 &\equiv 0 \quad " \end{aligned}$$

$v =$ somme des nombres de solutions de:

$$\begin{aligned} \alpha + \varrho\gamma + 1 &\equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta + \varrho\alpha + 1 &\equiv 0 \quad " \\ \gamma + \varrho\beta + 1 &\equiv 0 \quad " . \end{aligned}$$

On arrive à ce résultat dans chacune des trois suppositions qui peuvent être faites, à savoir, que $n(1-\varrho^2)$ fait partie de la classe A, B ou C. Cela tient évidemment à ce que les groupes de 3 congruences, qui viennent d'être trouvés, sont tels qu'ils n'éprouvent aucun changement par une permutation cyclique de α, β, γ.

Il y a maintenant trois cas à distinguer.

$$\text{I.} \quad \varrho \text{ appartient à } A, \text{ ou } \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = 1.$$

Dans ce cas, on a $\varrho\alpha = \alpha''$, $\varrho\beta = \beta''$, $\varrho\gamma = \gamma''$, et par conséquent t, u, v sont les sommes des nombres de solutions des congruences suivantes:

t	u	v
$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$

ou, d'après le paragraphe 25, si les résultats trouvés à cet endroit pour le nombre premier $a + b\varrho$ sont transportés au module $A + B\varrho$ avec la norme $3n + 1$,

$$\begin{aligned} t &= h + k + j = n - 1 \\ u &= j + l + k = n \\ v &= k + j + l = n\,. \end{aligned}$$

D'après le paragr. 36, on a dans ce cas, pour $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = 1.$

II. ϱ appartient a B, ou $\left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho.$

t, u, v sont alors les sommes des nombres de solutions des congruences suivantes:

t	u	v
$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	$\beta + \beta' + 2 \equiv 0$
$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$

ou bien:

$$\begin{aligned} t &= n \\ u &= n \\ v &= n - 1. \end{aligned}$$

D'après le paragr. 36, on a dans ce cas, pour $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2.$

III. ϱ appartient à C, ou $\left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho^2$.

t, u, v sont alors les sommes des nombres de solutions de:

t	u	v
$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$

ou bien:

$$t = n$$
$$u = n - 1$$
$$v = n.$$

D'après le paragr. 36, on a dans ce cas, pour $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho$.

Par là se trouve démontré tout ce qui a été dit au paragr. 33 concernant la forme générale des caractères qui permettent de reconnaître à laquelle des trois classes appartient un nombre premier donné.

---

39. Quant aux autres énoncés du paragr. 33, il suffira de remarquer que ce qui a été dit en 6 résulte immédiatement des formules:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{Q}\right] = \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{Q}\right]$$

et

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho^2}\right] =$$
$$= \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

De la remarque, que pour $b \equiv 2a$ le nombre premier (2, 5, 7, 11 . .) appartient toujours à la classe A, on peut encore déduire une conséquence qu'il paraît utile de noter ici. Puisque, à cause de

$$4p = 4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2,$$

3 ne fait *pas* partie des facteurs premiers de $2a - b$, il s'ensuit que tous les facteurs premiers de $2a - b$ sont des résidus cubiques de p, et par conséquent $2a - b$ lui-même est résidu cubique de p.

---

40. A ce même résultat conduit aussi la considération suivante, de tout autre nature.

Soit $p = 3n + 1$ et supposons que z parcoure un système complet de nombres incongrus, non divisibles par le module $a + b\varrho$; de l'équation

$$(z^3 + 1)^{2n} = z^{6n} + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} z^{3n} + \ldots + 1$$

il suit alors

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv -2 - \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} \text{ mod. } (a + b\varrho).$$

Mais, d'un autre côté, les nombres z^3 ... forment tous des résidus cubiques de $a + b\varrho$, chaque résidu étant écrit 3 fois, et parmi les nombres $z^3 + 1$ il y en a donc $3h$ qui appartiennent à la classe A, $3j$ à B, $3k$ à C; par conséquent, on a aussi:

$$\Sigma (z + 1)^{2n} \equiv 3h + 3k\varrho + 3j\varrho^2 \text{ mod. } (a + b\varrho)$$

ou, d'après les valeurs du paragr. 28,

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv a - b - 2 - b\varrho.$$

Il en résulte:

$$-\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \equiv a - b - b\varrho \equiv 2a - b \text{ mod.} (a + b\varrho),$$

de sorte qu'on a aussi:

$$2a - b \equiv -\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } p = 3n+1,$$

congruence remarquable, donnée pour la première fois par Jacobi, dans le *Journal* de Crelle, t. II, et dont la démonstration est ordinairement déduite de formules employées dans la théorie de la division du cercle.

En écrivant cette congruence sous la forme

$$(1.\ 2.\ 3\ldots n)^2(2a-b) \equiv -1.2.3\ldots(2n) \text{ mod. } p,$$

et en observant que

$$\begin{aligned} 2n+1 &\equiv -n \\ 2n+2 &\equiv -(n-1) \\ 2n+3 &\equiv -(n-2) \\ &\ldots \\ 3n &\equiv -1, \end{aligned}$$

que n est pair et $1.2.3\ldots(3n) \equiv -1$, on obtient:

$$(1,\ 2,\ 3\ldots n)^3(2a-b) \equiv 1 \text{ mod. } p,$$

d'où il ressort immédiatement que $2a-b$ est résidu cubique de p, ainsi que nous l'avions déjà trouvé ci-dessus, par une voie toute différente. Cette première démonstration nous avait appris, en outre, que tous les diviseurs de $2a-b$ sont des résidus cubiques.

LEYDE, déc. 1881.

L'HÉMATOXYLINE COMME RÉACTIF SPÉCIFIQUE

DES

MEMBRANES CELLULOSIQUES

NON LIGNIFIÉES ET NON SUBÉRIFIÉES,

PAR

E. GILTAY.

Les réactifs employés jusqu'ici pour reconnaître la cellulose ne brillent pas par une grande sensibilité et, en outre, dans beaucoup de cas, les résultats auxquels ils conduisent n'ont pas toute la certitude désirable.

A l'appui de cette assertion, examinons succinctement, quant à leur action, les réactifs connus.

Ceux-ci, — abstraction faite des réactifs négatifs, c'est-à-dire des réactifs spécifiques pour les membranes d'autre nature, comme l'est par exemple, pour la matière ligneuse, la phloroglucine, qui ne colore pas la cellulose, — sont surtout des substances iodées.

Comme on le sait, l'iode s'emploie dans deux formes principales de réactions sur les parois des cellules végétales: 1° dans la réaction avec l'iode et l'acide sulfurique, 2° dans la réaction de Schulze, avec le chlorure de zinc iodé.

Le traitement iodo-sulfurique consiste à imbiber d'abord par

l'iode la préparation qu'il s'agit de colorer, et à ajouter ensuite l'acide sulfurique [1]).

La coloration par la dissolution chlorozincique iodée de Schulze [2]) a, sur la méthode précédente, d'abord l'avantage de n'exiger qu'une seule manipulation. Ensuite, la coloration par l'iode et l'acide sulfurique offre l'inconvénient que les membranes cellulaires changent beaucoup pendant la réaction: presque toujours elles gonflent fortement, et dans maints cas elles sont, en peu de temps, complètement dissoutes. Il est clair que cette circonstance enlève toute valeur à la réaction iodo-sulfurique lorsqu'il s'agit d'étudier des structures délicates. Le chlorure de zinc iodé possède cette fâcheuse propriété à un degré moindre, mais néammoins encore beaucoup trop prononcé pour certains cas. Si l'on considère, en outre, que la couleur produite par le chlorure de zinc iodé est rarement très intense, on comprendra que ce réactif, quelle que soit l'importance des services qu'il a rendus, se prête mal à l'étude des fins détails sur des coupes très minces.

Il y a toutefois encore un autre défaut attaché aux deux réactifs iodés, défaut qui porte également une atteinte plus ou moins grave à la confiance qu'on peut leur accorder, et au sujet duquel nous devons entrer dans quelques développements.

---

1) Il y a encore d'autres matières qui, conjointement avec l'iode, opèrent plus ou moins généralement la réaction de la cellulose. C'est ainsi, par exemple, que l'acide sulfurique peut être remplacé par l'acide phosphorique. Ensuite, outre l'iode et l'eau, une des combinaisons suivantes peut suffire pour la coloration en bleu: acide iodhydrique, iodure de potassium, iodure d'ammonium, iodure de zinc ou un autre iodure métallique, chlorure de zinc (Voir: Behrens, *Hilfsbuch zur Ausführung mikroskopischer Untersuchungen*, p 271).

2) Schacht, *Das Microscop u. seine Anwendung* etc., Berlin, 1851, p. 31. — Le mode opératoire a été perfectionné par M. Radlkofer:

Radlkofer, *Ueber die Darstellung der Chlorzinkiodlösung als Reagens auf Zellstoff für mikroskopische Untersuchungen* (*Ann. d. Chem. u. Pharm. herausg. v.* Wöhler. Liebig u. Kopp, *Neue Reihe*, t. XVII, 1855, p. 332—337).

Pour l'application de la réaction iodo-sulfurique, l'acide sulfurique doit être étendu d'une quantité déterminée d'eau, quantité qui peut être différente dans des cas différents. C'est ainsi que des recherches spéciales ont appris à M. Harting [1]) que la dilution de l'acide sulfurique, nécessaire pour la réaction de la cellulose, varie de 10 parties d'acide avec 6 parties d'eau à 10 parties d'acide avec 2 parties d'eau; aussi conseille-t-il d'avoir toujours sous la main, préparés d'avance, des mélanges de concentration croissante, par exemple, de 10 parties d'acide avec 6, 5, 4, 3 et 2 parties d'eau.

Tous ceux qui ont effectué beaucoup de colorations par le chlorure de zinc iodé savent que ce réactif est plus ou moins capricieux. Tantôt on obtient immédiatement une teinte bleue ou violette bien franche, tantôt il ne se produit que lentement une coloration très équivoque, et cela dans des conditions en apparence tout à fait semblables. Ce réactif aussi doit quelquefois être employé à des degrés divers de concentration.

Pour montrer combien les deux réactifs iodés de la cellulose fournissent des résultats incertains et variables, il suffit de rappeler les opinions contradictoires qui ont cours relativement au point de savoir s'ils colorent, oui ou non, les parois des cellules cambiales.

Chez les Conifères, d'après M. Sanio [2]), il apparaîtrait dans la région du cambium une légère coloration sous l'influence des réactifs de la cellulose. M. Dippel [3]) conteste absolument cette action. M. Mikosch [4]) indique, au moins pour la substance molle des parois radiales, une coloration faible, tandis que, pour

---

1) Harting, *Het Mikroskoop*, t. II, p. 255.

2) Sanio, *Anatomie der gemeinen Kiefer* (*Pinus silvestris* L), dans: Pringsheim, *Jahrbücher*, t. X, p. 64.

3) Dippel, *Die neuere Theorie über die feinere Structur der Zellhülle betrachtet an der Hand der Thatsachen* (tiré à part des *Abh. der Senckenb. Gesellschaft*, t. X et XI) p. 53.

4) Mikosch, *Untersuchungen über die Entstehung und den Bau der Hoftüpfel*, dans: *Sitzb. d. K. Akad. der Wissensch. in Wien*, I, *Abth.*, *Juni-Heft*, 1881, p. 49 (p. 24 du tiré à part).

M. Strasburger [1]), ç'a été „chose facile" que de colorer la couche cambiale.

En ce qui concerne la région cambiale d'autres végataux, M. Dippel [2]) mentionne qu'elle n'est pas colorée en bleu par les réactifs de la cellulose. M. Richter [3]) n'a pas obtenu une coloration directe, mais bien une teinte bleue après avoir fait agir préalablement, pendant quelques instants, l'acide chlorhydrique ou la potasse caustique, ou même quelquefois après avoir excercé une pression sur la préparation. M. Solla [4]) trouve, en ayant égard aussi à l'action du chlorure de zinc iodé, qu'au moins la matière intercellulaire consiste en cellulose pure. M. Russow paraît également avoir constaté la coloration cellulosique dans des cellules cambiales; le Mémoire qu'il a publié à ce sujet m'est toutefois resté inconnu.

Ces conclusions discordantes, auxquelles des observateurs différents ont été conduits, relativement à des objets analogues, par les réactifs iodés de la cellulose, montrent qu'il faut être très prudent dans l'interprétation de résultats négatifs obtenus par l'application de ces réactifs.

L'incertitude qui subsiste en pareil cas n'est d'ailleurs pas dissipée par les autres matières recommandées pour la coloration de la cellulose.

---

1) Strasburger, *Ueber den Bau und das Wachsthum der Zellhäute*, Jena, 1882, p. 41.

2) Dippel, *Das Mikroskop*, 2er *Theil*, p. 82.

3) Richter, *Beiträge zur genaueren Kenntniss der chemischen Beschaffenheit der Zellmembranen bei den Pilzen*, dans: *Sitzber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien*, I *Abth.*, t. LXXXIII, 1881, p. 494.

4) D'après M. Strasbürger (*l. c.*, p. 41), M. Solla aussi serait d'avis que les parois cambiales ne donnent pas la moindre réaction de cellulose. M. Solla dit toutefois (*Oesterr. botan. Zeitschrift*, 1879, p. 351); „*Das Verhalten des Cambium zum .... und Chlorzinkiodlösung berechtigt zu dem Schlusse dass hier reine Cellulose die Intercellularsubstanz ist*". Ce qu'il nie complètement, c'est la coloration en bleu dans les méristèmes des points végétatifs (*l. c.*, p. 351).

En décrivant l'action du réactif de Trommer sur les tissus végétaux, M. Sachs [1]) fait mention aussi de la teinte bleue qu'il communique à certaines parois cellulosiques.

La preuve, toutefois, que cette méthode n'est pas susceptible d'un emploi général, c'est que, lorsque la coloration est trop peu distincte sur des coupes minces, on est obligé d'avoir recours à des coupes plus épaisses, jusqu'à ce que la teinte s'accuse suffisamment [2]). Il en résulte, évidemment, que l'étude des détails délicats ne peut pas se faire avec ce réactif. En outre, toutes les parois cellulosiques ne sont pas colorées par lui.

M. Tangl [3]) a conseillé de faire usage, comme agent colorant, d'une solution de carmin, préparée en faisant bouillir cette substance pendant environ 10 minutes dans une solution concentrée d'alun, puis filtrant la liqueur. Les membranes subérifiées et lignifiées n'éprouveraient aucune coloration de la part de ce réactif. En ce qui concerne la cellulose, M. Tangl lui-même dit qu'il colore „la plupart" des membranes de cette nature. Pour moi, il m'est arrivé maintes fois de ne pas obtenir avec lui de coloration chez les parois cellulosiques; cette restriction rend ce réactif également impropre à l'usage, au moins dans les cas difficiles.

M. Tangl [3]) communique, en outre, que des membranes indifférentes à son carmin aluné, telles que celles du cambium et des cellules parenchymateuses plus vieilles, absorbent, sous forme insoluble, la matière colorante d'une décoction aqueuse de bois de campêche, lorsque ce liquide renferme en même temps un peu de vitriol de fer.

M. Behrens [4]) dit, à propos de ce réactif, que des „mem-

---

1) Sachs, *Ueber die Stoffe welche das Material zum Wachsthum der Zellhäute liefern*, dans: Pringsheim, *Jahrb.*, t. III, p. 189.

2) Voir; Behrens, *l.c.*, p. 275.

3) Tangl, *Ueber offene Communicationen zwischen den Zellen des Endosperms einiger Samen*, dans: Pringsheim, *Jahrbücher*, t. XXII, p. 170.

4) *l.c.* pag. 274.

branes cellulosiques modifiées" s'imprègnent également de la matière colorante; ce ne serait donc pas encore là le réactif typique cherché.

Un réactif qui mérite, dans la plupart des cas, la préférence sur celui de Schulze, et qui notamment nous vient en aide là où les autres réactifs se montrent impuissants, c'est la solution d'hématoxyline.

Occupons-nous d'abord de son mode de préparation et d'emploi.

Je prépare ce réactif en prenant 5 cc d'une solution, tenue en réserve, de 7 grammes d'hématoxyline dans 50 cc d'eau, et en ajoutant ces 5 cc à 100 cc d'une solution d'alun à $\frac{3}{4}$%. Il est bon de préparer ce mélange une couple de jours avant de s'en servir, parce qu'au commencement la coloration n'est pas encore assez intense. Le liquide se troublant promptement, on en passe chaque fois, avant l'usage, une petite partie par le filtre.

Cette solution a une couleur si foncée qu'il est parfois difficile de retrouver les petits coupes de tissu qu'on y a introduites. Le moyen ordinaire, tenir le verre contenant le liquide coloré au-dessus d'un papier blanc ou de quelque objet analogue, est ici souvent insuffisant; on doit faire passer par le verre un faisceau lumineux intense. Pour cela, l'expédient le plus simple, et qui réussit toujours, est de tenir le verre au-dessus d'un petit miroir, incliné de telle sorte sur la table que la lumière du ciel soit projetée à travers le réactif. Lorsque celui-ci n'est pas employé en couche trop épaisse ($\frac{1}{2}$ cm au plus), on voit de cette manière les coupes les plus fines.

Pour colorer la préparation, on la laisse tremper dans le réactif pendant 5—15 minutes (toujours 10—15 minutes quand une forte coloration est nécessaire). Le traitement ultérieur varie selon les cas. Veut-on une belle coloration, très intense, la préparation devra être placée dans un milieu très réfringent, tel, par exemple, qui l'huile de girofle ou le baume du Canada (les indices des liquides employés par moi étaient, respectivement,

1,54 et 1,50). De cette façon, toutefois, la netteté des parties non colorées de l'image souffre quelquefois un peu trop. Dans le cas où une coloration peu intense, quoique bien distincte encore, est suffisante, on peut faire usage d'un mélange à parties égales de glycérine et d'eau (indice environ 1.40), tandis qu'une image tenant le milieu entre les deux précédentes est fournie par l'huile de lin (indice environ 1.47).

Lorsque la préparation doit être examinée dans la glycérine, elle n'a besoin que d'un court lavage à l'eau. Est-elle destinée à être immergée dans l'huile, il faut d'abord la déshydrater au moyen de l'alcool absolu. Si dans cette opération elle devient indistincte, par suite de la formation d'un précipité en forme de gouttelettes, on commence, avant de l'introduire dans l'alcool, par la laver légèrement dans l'eau. Après qu'elle a été retirée de l'alcool, on la plonge un instant dans l'huile de girofle, pour la porter ensuite dans l'huile au sein de laquelle on se propose de l'observer.

Dans le baume du Canada, ou même dans l'essence de girofle, les préparations colorées se conservent longtemps.

Parmi les matières ne faisant pas partie de la paroi des cellules, le réactif en question colore parfois distinctement le plasma [1]), et en outre, comme tout le monde le sait, les éléments chromatiniques [2]) des noyaux.

Quant à son action sur les parois des cellules, disons tout d'abord que M. Treub, lors de ses recherches sur la coloration du noyau, connaissait déjà le fait que l'hématoxyline colore les parois cellulosiques. Comme réactif spécifique de ces membranes, elle n'a toutefois pas encore été recommandée, que je

---

1) A raison de cette propriétè, il est bon quelquefois (par exemple dans l'étude des membranes minces des Fungi) d'opérer sur des cellules plasmolytiques. On évite ainsi la possibilité de prendre la couleur du plasma pour celle des parois cellulaires.

2) M. Treub, *Iets over kleuring van celkernen*, dans: *Nederl. kruidkundig Archief*, 2e Sér., t. III, p. 266.

sache. Et pourtant, elle possède le grand mérite de ne communiquer aucune teinte ni aux parois complètement lignifiées, ni même aux membrancs cuticularisées.

Pour se convaincre de l'extrême sensibilité de ce réactif, on n'a qu'à le faire agir, par exemple, sur un xylème en majeure partie fortement lignifié mais contenant, disséminées dans la masse ligneuse, des cellules parenchymateuses à parois très minces. Comme exemple caractéristique on peut citer aussi la coloration des stries cellulosiques dans les couches cuticulaires de l'épiderme des *Hakea*. Chez le *Hakea suaveolens*, par exemple, ces stries sont très fines; néanmoins, elles se colorent très nettement en bleu et se distinguent au premier coup d'œil des couches cuticularisées, restées parfaitement incolores [1]).

Même si l'hématoxyline, qui colore la cellulose en bleu, donnait une autre teinte aux membranes subérifiées et lignifiées, elle aurait encore une certaine valeur comme réactif de la cellulose. Mais cette valeur est accrue, à ce qu'il me semble, par la circonstance que l'hématoxyline n'exerce aucune action colorante sur les membranes complètement transformées en liège ou en bois. A raison de cette propriété, elle est naturellement beaucoup plus apte à déceler, dans les parois cellulaires incomplètement lignifiées ou subérifiées, les éléments cellulosiques encore inaltérés et accessibles au réactif. Lorsqu'en pareil cas on fait usage du réactif de Schulze, qui colore la matière ligneuse et subéreuse en jaune, la couleur bleue, simultanément développée dans une paroi cellulaire, ne ressort pas assez nettement pour qu'on puisse juger avec certitude du degré de la lignification.

Il y a aussi des cas, chez le sclérenchyme par exemple, où l'on obtient une teinte jaune, tandis que la dissolution de la phloroglucine dans l'acide chlorhydrique, qui, convenablement appliquée, est un réactif très sensible de la matière ligneuse,

---

1) Voir; De Bary, *Vergleichende Anatomie*, p. 82.

n'occasionne pas ou presque pas de coloration. La couleur jaune, développée par le réactif de Schulze, ferait alors admettre mal à propos un état de lignification, ou du moins ferait juger celui-ci plus avancé qu'il ne l'est en réalité. Dans ces cas aussi, l'hématoxyline peut répandre du jour.

Si l'on fait, par exemple, une coupe à travers un mince rameau d'*Aesculus Hippocastanum*, et qu'on la traite par l'hématoxyline, les lamelles moyennes des cellules, dans le revêtement sclérenchymateux du phloème, restent tout à fait incolores; aucune teinte n'est prise non plus par la couche externe de la paroi, celle qui tapisse la lamelle moyenne, et ce sont seulement les couches d'épaississement suivantes qui se colorent distinctement en bleu, la couche interne montrant ordinairement la coloration la plus intense. En traitant une coupe par la phloroglucine et l'acide chlorhydrique, on obtient un tableau exactement inverse. La lamelle moyenne présente alors la teinte la plus foncée, les couches externes de la paroi des fibres sont aussi encore colorées, mais vers le centre des fibres la couleur s'affaiblit rapidement et les couches internes sont complètement ou presque complètement incolores. Lorsqu'on emploie au contraire le réactif de Schulze, la lamelle moyenne, ainsi que la couche pariétale contiguë, prend il est vrai une teinte un peu plus vive que le reste de la paroi, mais ce reste est pourtant aussi coloré assez uniformément en jaune, sauf tout au plus, et dans quelques fibres seulement, la partie tout à fait interne. En admettant que les couches internes de la paroi contiennent encore plus ou moins de cellulose, l'image obtenue après l'emploi de l'hématoxyline est en parfait accord avec celle que fournit l'application de la phloroglucine; toutes les deux, en effet, dénotent qu'une lignification un peu notable n'a eu lieu que dans les parties les plus périphériques de la paroi, tandis que plus près du centre il n'existerait que de la cellulose peu ou point lignifiée. Le chlorure de zinc iodé, au contraire, ferait présumer un état de lignification assez uniforme et l'absence de couches cellulosiques non lignifiées, ce qui toutefois, comme nous venons

de le dire, n'est pas confirmé par la réaction de la phloroglucine. Dans ce cas, et dans d'autres analogues, l'hématoxyline paraît donc donner, plus rapidement que le chlorure de zinc iodé, des notions exactes sur la nature de la paroi. — A la fin de cet article, nous verrons comment pourrait s'expliquer la teinte jaune occasionnée par le chlorure de zinc iodé, alors que la phloroglucine et l'acide chlorhydrique n'indiquent pas la présence de matière ligneuse.

Outre les membranes cellulaires proprement dites, il y a encore une matière qui est colorée très fortement par l'hématoxyline, à savoir, la matière intercellulaire [1]), telle qu'on la rencontre dans des éléments non lignifiés, quelquefois aussi dans des éléments déjà lignifiés en tout ou en partie. La teinte que prend cette matière est même très intense et se rapproche le plus de celle qu'on obtient avec les parois des cellules cambiales. Un exemple très instructif est offert par les cellules médullaires lignifiées du *Phlox paniculata*; après avoir fait agir l'agent colorant, on voit ici, entre deux parois primaires incolores, une mince lamelle colorée en bleu-violet, qui se continue dans les cavités intercellulaires, où elle tapisse, sous la forme d'une couche un peu plus épaisse, les parois formant ces cavités. Comme autre exemple caractéristique je mentionnerai le sclérenchyme des feuilles du *Hakea suaveolens*. Lorsqu'une coupe transversale de ce tissu est examinée dans la glycérine, on croit y voir, entre les fibres sclérenchymateuses, des cavités intercellulaires nettement limitées. Vient-on, toutefois, à colorer une préparation par l'hématoxyline, alors les cavités prennent la teinte violet foncé que présente, dans les mêmes circonstances, la matière intercellulaire. Cela prouve que les *cavités* n'existaient qu'en apparence; le fait que, dans les préparations non colorées, elles se dessinent avec tant de netteté, tient sans doute uni-

1) Ce terme est employé ici dans le sens que lui donne M. Dippel: *Die neuere Theorie über die feinere Structur der Zellhülle*, *Abdruck aus den Abh. d. Senckenb. Gesellsch.*, t. X et XI, p. 33 et 51.

quement à ce que l'indice de réfraction de la matière intercellulaire est sensiblement égal à celui de la glycérine, d'où doit nécessairement résulter le même effet visuel que s'il y avait des cavités véritables.

Les parois non lignifiées et non subérifiées présentent, comme nous l'avons vu, des modifications qui se comportent d'une façon douteuse ou négative vis-à-vis des réactifs iodés en usage jusqu'ici. C'est surtout à l'égard des parois du cambium que des résultats discordants ont été obtenus, avec ces réactifs, par des observateurs différents.

Avec l'hématoxyline, la paroi cambiale prend constamment une couleur superbe et très intense. Comme les deux principales matières, autres que la cellulose, qui entrent dans la composition des membranes (la lignine et la subérine) ne se colorent pas sous l'influence de l'hématoxyline, cette réaction des parois cambiales rend très probable qu'elles sont analogues, par leur nature, aux parois cellulosiques.

La substance dont sont composées les parois des cellules des Champignons est au nombre de celles qui résistent le plus opiniâtrement à la réaction cellulosique. M. Schacht [1]) et M. de Bary [2]) n'ont pas même pu la colorer en bleu après l'avoir fait bouillir avec la potasse, ni après l'avoir traitée par le mélange de Schulze ou par l'acide chromique. Comme, dans tous les cas ordinaires, ces réactifs produisent sur les parois cellulaires lignifiées et subérifiées la réaction de la cellulose, parce que, selon les idées de Payen, les matières incrustantes seraient dissoutes et le squelette cellulosique originel mis à nu, M. de Bary a admis que, chez les Champignons, le squelette des parois cellulaires n'est pas composé de cellulose, mais d'une substance particulière, qu'il a appelée *Pilzcellulose*.

M. Richter [3]) se forme une autre opinion de la nature des

---

[1]) Schacht, *Die Pflanzenzelle*, p. 13.

[2]) A. de Bary, *Morphologie und Physiologie der Pilze, Flechten und Myxomyceten*, p. 7.

[3]) Richter, *l. c.*

membranes cellulaires des Champignons. D'après ses expériences, les membranes en question peuvent bien dûment prendre une couleur bleue après avoir été „purifiées" successivement par l'eau, la potasse, l'acide acétique ou chlorhydrique, l'alcool, l'éther et enfin de nouveau par l'eau bouillante; ce résultat s'obtiendrait même par l'emploi de la seule lessive de potasse, à condition que l'action soit suffisamment prolongée ou que la potasse soit renouvelée à plusieurs reprises. M. Richter croit devoir en conclure que la base des membranes cellulaires est chez les Champignons [1]), tout comme chez les autres plantes, de la cellulose, et que la difficulté de la coloration tient seulement à la présence de matières étrangères spéciales, dont on ne peut débarrasser ces membranes qu'avec beaucoup de peine. Aussi, d'après lui, la *Pilzcellulose* de M. de Bary n'existerait pas.

En ce qui concerne l'action de l'hématoxyline dans ces mêmes cas, je me contenterai provisoirement de mentionner que, chez presque tous les Champignons que j'ai examinés sous ce rapport (c'étaient principalement des Basidiomycètes), les parois cellulaires ont été plus ou moins colorées par l'hématoxyline. Plus tard je me propose de revenir plus particulièrement sur ce point.

A preuve que la cellulose existant dans le règne animal n'échappe pas non plus à l'action spécifique de l'hématoxyline, je citerai le fait que la matière intercellulaire de la tunique externe des Tuniciers a pris, sous l'influence de ce réactif, une teinte très belle.

En récapitulant maintenant par la pensée ce qui a été dit de l'action de l'hématoxyline sur les tissus végétaux, on voit que, en général, l'hématoxyline et le réactif de Schulze se comportent de la même manière. L'hématoxyline colore en bleu là où le réactif de Schulze colore également en bleu, elle ne

---

1) Pour l'étude des parois cellulaires des champignons, il faut toujours laisser la préparation au moins 15 minutes dans l'hématoxyline et ensuite l'observer dans l'huile de girofle.

colore pas, là où le tissu présente un caractère de lignification ou de subérification avancée.

Ces faits m'ont conduit à regarder l'hématoxyline, en ce qui concerne les matières pariétales, comme un réactif spécifique des membranes ni lignifiées ni subérifiées. Les raisons pour lesquelles, dans les cas de ce genre, l'hématoxyline est souvent préférable au réactif de Schulze, ont été exposées ci-dessus.

Mais, en outre, il y a quelques cas où le réactif de Schulze ne donne pas la coloration, tandis que l'hématoxyline la produit ou du moins peut la produire.

La signification de ces cas mérite de nous arrêter encore un instant. Comme nous l'avons vu, ils sont fournis par les cellules méristématiques (cambiales) et quelquefois par les hyphes des Champignons.

On a parfois cru que la paroi de ces deux espèces d'éléments était imprégnée de matières albuminoïdes [1]). Or, la tentation est forte de rattacher à cette hypothèse l'action positive de l'hématoxyline, et d'admettre que la coloration par ce réactif doit être rapportée, au moins en partie, à des corps incrustants albuminoïdes. Ces corps albuminoïdes devraient alors être de nature telle, qu'ils soient colorés de la même manière que le plasma par l'hématoxyline. La tentation ne devient pas moindre lorsqu'on voit, dans des parois cellulaires qui sont colorées par l'hématoxyline, le réactif de Schulze déterminer quelquefois une coloration prononcée en jaune [2]) [3]), bien que la phloroglucine ne décèle pas, ou presque pas, de matière ligneuse dans ces parois.

Je pense toutefois, avec M. Richter [4]), qu'il est encore très incertain si, dans les cas susdits, des matières albuminoïdes in-

1) Richter, *l.c*, p. 498, 505 et suiv.

2) Les parois des cellules méristématiques sont souvent aussi colorées en jaune par l'iodo-chlorure de zinc. *Voir* Solla *l.c.*, p. 351.

3) Donc, la même coloration que prennent aussi, par l'iode, les parties plasmatiques.

4) Richter, *l.c.*, p. 506

crustent la paroi, et qu'il est bon de ne pas attacher trop d'importance aux spéculations sur ce sujet, d'autant plus que, pour des raisons qui seront développées plus loin, nous savons encore très peu de chose des réactions auxquelles donnent lieu les membranes organisées et des facteurs qui exercent de l'influence sur ces réactions. Au reste, quand même la coloration des parois des cellules cambiales et des hyphes serait due *entièrement* à des matières incrustantes albuminoïdes, la valeur de l'hématoxyline, comme réactif pour les parois non lignifiées et non subérifiées, n'en serait pas sensiblement atteinte. Le point essentiel, aussi au point de vue physiologique, c'est que l'hématoxyline colore seulement les parois cellulosiques (jeunes ou vieilles, imprégnées ou non de substances albuminoïdes), qui n'ont pas encore subi de lignification ni de subérification complète. Une fois cette réaction obtenue, le chlorure de zinc iodé pourra peut-être servir à distinguer si les membranes sont imprégnées, ou non, de matières albuminoïdes. Il ne faudra toutefois pas oublier que, dans les cas où le réactif de Schulze donnera une teinte jaune, le contrôle d'un autre réactif sera nécessaire, car, de cette teinte seule, on ne saurait déduire si elle provient de corps incrustants albuminoïdes, ou bien de lignine ou de subérine.

Nous avons dit que, là où le réactif de Schulze donne une coloration bleue, l'hématoxyline aussi communique aux parois des cellules la teinte bleu-violet caractéristique, et nous venons de discuter les deux cas où l'hématoxyline développe la couleur bleue, tandis que le chlorure de zinc iodé ne la produit *pas*.

Il nous reste encore à parler d'une exception remarquable, la seule de ce genre qui me soit connue: il s'agit d'un cas où l'on obtient une coloration avec le réactif de Schulze, mais *non* avec l'hématoxyline. Ce cas nous est offert par la substance dite „ivoire végétal" (endosperme du *Phytelephas macrocarpa*), donc, chose singulière, justement par le tissu que M. Fremy a cité, à cause de sa solubilité totale dans le liquide ammoniaco-

cuivrique, comme un des exemples de la cellulose la plus pure.

On doit toutefois, quand il s'agit d'un résultat négatif tel que celui-ci, n'en tirer des conclusions qu'avec beaucoup de prudence. Lorsqu'une certaine matière en colore une autre, et peut par suite être employée comme réactif de celle-ci, la coloration n'est pourtant possible que si les deux matières peuvent entrer en contact l'une avec l'autre. Il est donc à prévoir que la structure des parois cellulaires sera un facteur important dans les réactions auxquelles on soumettra ces parois. Si la structure des membranes végétales est, par exemple, telle que la veut la théorie de M. Nägeli, on comprend que, dans certains cas déterminés, les éléments de la paroi (micelles) pourraient être situés de façon à ce que leur masse principale fût inaccessible à une matière qui d'ailleurs, au contact de ces éléments, serait susceptible de contracter une union chimique avec eux. Qu'on se figure, par exemple, les micelles tellement rapprochés les uns des autres que les particules du réactif ne puissent pas circuler librement dans les minces couches de liquide dont les micelles sont enveloppés. La non-coloration par le réactif employé ne prouverait alors nullement que celui-ci ne mérite pas confiance comme agent révélateur de la matière constituante des micelles, puisque, à cause de la structure particulière de la paroi, cette matière n'aurait pu être suffisamment imbibée par le réactif.

Or, l'excessive dureté du tissu endospermique des graines de Phytelephas rend assez vraisemblable que, précisément dans ce cas, l'hypothèse susdite se trouve réalisée, que la faible épaisseur des couches de liquide qui entourent les micelles empêche la pénétration d'un réactif peu énergique, tel que l'hématoxyline. Cela pourrait expliquer en même temps pourquoi, dans ce cas unique, le réactif de Schulze produit *bien* une coloration; ce réactif, en effet, exerce une action de gonflement, ce qui lui permet peut-être de modifier la structure de la paroi de façon à ce que la pénétration devienne possible; le réactif se fraierait alors lui-même un chemin dans la paroi. Lorsque les coupes du tissu endospermique de Phytelephas sont

soumises pendant $\frac{1}{2}$ minute à l'action de l'acide sulfurique concentré, l'hématoxyline aussi colore les parois.

Après ce qui vient d'être dit, il sera sans doute superflu de déclarer expressément que je suis loin de croire avoir découvert, dans l'hématoxyline, un réactif qui apprendra toujours, avec une absolue certitude, si l'on a affaire, oui ou non, à une paroi cellulosique. Il n'y a même, à mon avis, pas une seule des matières constituantes de la paroi cellulaire qui puisse, dans tous les cas, être décelée sûrement par n'importe quel réactif. Pour cela, les données nécessaires nous manqnent complètement. Il faudrait, en effet, connaître parfaitement, d'abord les matières en question, et ensuite l'influence que la structure organique exerce sur les réactions; or, ni l'un ni l'autre n'est le cas.

L'hématoxyline ne prétend donc pas à remplacer entièrement les autres réactifs de la cellulose. Tant que les deux conditions sus-indiquées ne sont pas remplies, on ne pourra peut-être jamais dire à priori qu'un réactif quelconque, pour les cas dont il s'agit ici, rendrait les autres inutiles. Chacun d'eux a sa valeur, et c'est par la comparaison de l'action de tous les réactifs connus qu'on arrive le mieux à la connaissance des matières étudiées. Je pense seulement que, pour distinguer les membranes cellulosiques des membranes lignifiées et subérifiées, l'hématoxyline est un réactif plus général, et surtout plus sensible, que ceux dont on a fait usage jusqu'à présent, et qu'il mérite donc souvent la préférence. Comme moyen de contrôle, dans les cas douteux, il sèra toutefois constamment nécessaire d'avoir recours aussi à d'autres réactifs.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE

WILLEBRORD SNELLIUS,

PAR

P. VAN GEER.

Willebrord Snellius naquit à Leyde et y fut élevé; c'est là aussi qu'il a enseigné, qu'il a fait toutes ses découvertes et qu'il est mort.

Son père, Rodolphe Snel van Roijen (ou Rodolphus Snellius à Roijen, ainsi que, suivant l'usage du temps, il s'appelait dans ses écrits latins), était né à Oudewater, en 1546, d'une famille ancienne et aisée. De bonne heure il montra de grandes dispositions pour l'étude; il reçut sa première instruction à Utrecht; ses classes terminées, et son père étant mort entretemps, il retourna dans sa ville natale, mais pour n'y faire qu'un court séjour. Son esprit inquiet ne lui permettait pas de trouver le repos dans la paisible petite ville, de sorte que sa mère résolut de l'envoyer, dès l'âge de quinze ans, à l'étranger, pour y continuer ses études. Dans différentes universités, telles que Jena, Wittenberg et Heidelberg, il s'appliqua surtout aux études littéraires; de cette dernière ville, la peste le chassa vers Marbourg en Hesse, où il fut promu *magister artium* et où il s'adonna spécialement à l'étude de la philosophie. Marbourg le

retint pendant beaucoup d'années, il y enseigna les lettres grecques, latines et hébraïques et s'acquit une grande considération par l'étendue et la variété de ses connaissances. Mais, là non plus, il ne trouva de repos définitif. Accompagné d'un frère plus jeune, qui était venu le rejoindre, il partit pour l'Italie et, en changeant de pays, changea aussi la direction de ses études, car à Pise et à Florence il s'appliqua à la médecine. Ensuite, il se rendit à Rome, puis retourna à Marbourg; à ce moment, toutefois, le désir de revoir sa patrie, dont la situation était alors si critique, s'empara de lui avec une force irrésistible. Après seize ans de pérégrinations à l'étranger, il rentra en Hollande; il trouva sa ville natale en grande partie détruite et abandonnée. Il s'y établit et s'y maria, mais bientôt après il alla demeurer à Leyde (1578), attiré par la fondation récente de l'Université. Là, il se fit d'abord inscrire comme étudiant en médecine; bientôt, toutefois, les curateurs de l'Université le nommèrent lecteur, puis, peu après, professeur extraordinaire de mathématiques; l'enseignement de l'hébreu lui fut aussi confié pendant quelque temps. Rodolphe Snellius fut donc au nombre tant des premiers étudiants que des premiers professeurs de la nouvelle école, où il eut l'honneur de compter parmi ses élèves le prince Maurice. Une fois encore il fit le voyage de la Hesse, pour rendre visite à son protecteur et ami le landgrave, avec lequel, plus tard aussi, il entretint une correspondance suivie. De retour à Leyde, il fut nommé, en 1601, à la chaire de philosophie, chaire qu'il occupa, malgré les offres réitérées reçues de l'étranger, jusqu'à sa mort, en 1613; durant tout ce temps, il enseigna d'ailleurs aussi les mathématiques; trois fois la dignité de recteur lui fut conférée. Il laissa un fils, qui non seulement continua son œuvre de savant et de professeur, mais assura à leur nom, pour toujours, une place d'honneur parmi les noms les plus illustres de l'Université.

Ce fils, Willebrord (généralement connu sous le nom de Willebrordus Snellius à Roijen, qu'il avait adopté dans ses

ouvrages latins), avait vu le jour à Leyde, en 1581 [1]). Son père le destinait à l'étude du droit, mais le jeune homme donna des preuves si frappantes d'aptitude pour les mathématiques, que le père dut renoncer à son projet et le laisser libre dans son choix. A l'âge de 19 ans il fit déjà des leçons publiques sur l'Almageste de Ptolémée. Ce développement précoce engagea son père à l'envoyer visiter quelques universités étrangères. Durant ce voyage, il fit à Wurtzbourg la connaissance d'Adrien Romain et à Prague celle de Tycho Brahé, chez qui il cultiva l'astronomie pratique et où il se lia aussi d'amitié avec Kepler, l'élève de Tycho. De Prague il alla à Altorf, à Tubingue et dans d'autres villes. Ensuite il passa en France et étudia pendant quelque temps à Paris, d'où son père, qui se trouvait alors à Marbourg, l'appela près de lui. Toutefois, il ne revint pas en Hollande avec son père, mais, remontant le Rhin, il se rendit en Suisse, où il pénétra jusqu'au cœur des Alpes. Enfin, il retourna à Leyde; peu de temps après, son père étant tombé malade, il fut chargé de donner, sous le titre de professeur extraordinaire, les leçons de mathématiques. A la mort de son père, en 1613, il lui succéda dans cette chaire, en qualité de professeur ordinaire. Pendant treize ans seulement il a occupé ce poste, car déjà en 1626 il succomba, après une longue maladie, à l'âge peu avancé de 45 ans [2]). Si court que fut

1) Et non en 1591, comme il est dit dans beaucoup d'ouvrages historiques (Montucla, *Histoire des mathématiques*; Poggendorf, *Biographisches Wörterbuch* etc). Une courte autobiographie de W. Snellius, avec portrait, se trouve dans l'ouvrage: J. Meursii *Athenae Batavae*, 1625. L'année de sa naissance n'y est pas donnée, mais on y lit qu'en 1600 il avait atteint l'âge de 19 ans. Cette indication a été confirmée par les recherches qu'a bien voulu faire, à ma demande, M. l'archiviste de Leyde; dans un écrit de septembre 1682, il a recontré la mention que la famille de Rodolphe Snellius était composée, à ce moment, du mari, de la femme et de leur fils Willebrord.

2) W. Snellius avait épousé, en 1608, Marie de Langhe, fille du bourgmestre de Schoonhoven, laquelle ne lui survécut que d'une année. Ils laissèrent trois enfants, deux fils, Rodolphe et Laurent, et une fille, Jeannette.

ce temps, il n'en a pas moins été, pour les sciences mathématiques et physiques, l'une des périodes les plus brillantes de l'université de Leyde. Et cela, non seulement à cause de l'enseignement de Snellius, qui attirait des élèves de tous les pays civilisés, mais surtout grâce aux ouvrages qu'il composa et aux observations qu'il accomplit.

Son premier ouvrage publié en 1607, traite d'un manuscrit de Pappus sur les problèmes d'Apollonius de Perga, manuscrit qui lui avait été donné à étudier par Joseph Scaliger, et dans lequel se trouvent différentes propositions géométriques, que Snellius élucida et compléta; la seconde partie de cet ouvrage est dédiée à Simon Stevin, „l'égal d'Archimede", le maître du prince Maurice. L'année suivante parut une troisième partie, dédiée au prince Maurice lui-même et traitant du rapport anharmonique, de sa construction et de ses propriétés [1]).

Durant son séjour à l'étranger, Snellius ne publia rien, mais, à peine de retour à Leyde, il fit paraître un petit traité, dédié à Hugo Grotius, sur la valeur des monnaies chez les Grecs, les Romains et les Israélites.

Après sa nomination à la place qu'avait occupée son père, il écrivit différents ouvrages. Aux mathématiques pures appartient, outre sa traduction de quelques mémoires laissés par Ludolphe van Ceulen et remaniés par Snellius, le petit livre intitulé *Cyclometricus*, traitant d'un sujet qui à cette époque était à l'ordre du jour parmi les mathématiciens, savoir, la détermination du rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre; la méthode qu'il appliqua à cette recherche lui était entièrement propre et plus expéditive que celle de Ludolphe van Ceulen. Il calcula le rapport en question jusqu'à la 34ième décimale,

---

[1]) *Apollonius Batavus, de sectione determinata.* Cet écrit a souvent, entre autres dans le *Biogr. Wörterb.* de Poggendorf, été attribué, mal à propos, à R. Snellius, le père.

et comme, à cet effet, il employait et calculait des polygones de 1073741824 côtés, on peut se faire une idée du travail qu'il dut s'imposer, à une époque où les logarithmes, à peine inventés, n'étaient pas encore en usage.

Parmi les travaux purement mathématiques de Snellius se trouve aussi un traité de trigonométrie plane et sphérique, qui, rédigé en grande partie dans les derniers temps de sa vie, ne fut achevé et publié qu'après sa mort, par son disciple Hortensius. C'était, évidemment, le résumé de ses leçons à l'université. C'est un excellent petit ouvrage, très différent sans doute de nos traités modernes sur le même sujet, mais qui se distingue par l'enchaînement méthodique des idées et la simplicité de l'exposition. Les formules, telles qu'on les emploie aujourd'hui, ne s'y trouvent pas. Après avoir établi les principales définitions, l'auteur montre comment peut être composée une table de sinus et il en donne le calcul. Il donne également une table des tangentes et des sécantes, avec sept décimales, mais sans logarithmes. Ensuite il aborde le calcul des triangles et fait connaître à cette occasion, dans la 4ième proposition du second livre, l'élégante démonstration de la règle des sinus, qui est encore mentionnée aujourd'hui, sous le nom de démonstration de Snellius, dans quelques ouvrages élémentaires. Aucune autre règle trigonométrique n'est donnée par lui; il se sert seulement du théorème de Pythagore, appliqué aussi aux triangles obliquangles, et calcule ainsi tous les cas de la trigonométrie rectiligne, y compris le cas douteux; quelques problèmes de géométrie pratique, relatifs à la mesure des distances et des hauteurs, terminent cette partie.

Dans le livre suivant, il passe aux triangles sphériques. D'abord sont exposées les propriétés générales, et ici nous trouvons la première mention tant du triangle adjacent que du triangle polaire. La remarquable relation entre les éléments de ces triangles, l'usage qu'on en fait — encore aujourd'hui et exactement de la même manière — pour trouver et démontrer différentes propriétés du triangle, sont donc des découvertes de

Snellius. Le calcul des triangles s'exécute de nouveau sans le secours direct de formules, en s'appuyant seulement sur les trois relations les plus simples du triangle rectangle. Quelques applications à l'astronomie sphérique servent de conclusion à l'ouvrage.

Comme travail relatif à l'astronomie, on peut citer surtout une description de la comète qui se montra au ciel dans le mois de novembre 1619, description à laquelle Snellius joignit celle de la comète de 1585, observée par Rothmann, l'astronome du landgrave de Hesse.

Déjà antérieurement il avait publié des observations faites à l'observatoire de Cassel, sous la direction du landgrave, en y joignant d'autres observations, de Tycho Brahé, de Regiomontanus et de Bernard Walter, faites à Nuremberg. Mais ses recherches et ses écrits sur cette matière n'ont pas beaucoup de valeur. D'abord, les moyens dont il disposait étaient très imparfaits, car les lunettes venaient à peine d'être inventées et ne furent employées que plus tard dans les recherches scientifiques, de sorte qu'il dut, de même que Tycho Brahé, exécuter toutes ses observations à l'œil nu et à l'aide d'instruments assez grossiers. Ces instruments lui avaient été prêtés, à sa demande, par le prince Maurice; l'exactitude des observations n'allait pas au-delà des minutes.

D'un autre côté, ses idées non plus ne s'élevaient, en astronomie, au-dessus du niveau de son temps: il était et resta un fidèle adhérent du système de Ptolémée. Quoique la grande découverte de Coppernic eût déjà soixante-dix ans de date et que son système gagnât du terrain parmi les savants, Snellius n'en parle nulle part et se borne à dire que les objections faites au système de Ptolémée sont de peu de valeur. Quant aux recherches de Galilée, il ne pouvait en avoir connaissance, Galilée, bien que son contemporain, ayant vécu beaucoup plus longtemps et n'ayant publié ses principales découvertes qu'après la mort de Snellius. De même, les relations que Snellius, pen-

dant son séjour à l'étranger, àvait eues avec Kepler, étaient antérieures de beaucoup à l'époque où celui-ci posa les bases de l'astronomie moderne; lors de ces relations, tous les deux se trouvaient sous l'influence de Tycho Brahé qui, on le sait, n'était pas partisan du système de Coppernic.

La description que Snellius donne de la comète est aussi sans grand intérêt, parce qu'aucune figure ne l'accompagne et qu'on ne peut donc se former une idée nette de cet astre remarquable. Il montre bien, par la parallaxe, que la comète était beancoup plus éloignée de la Terre que la Lune, qu'elle ne pouvait consister en vapeurs qui se seraient élevées de la Terre, et que néanmoins elle était de nature éthérée; mais, d'ailleurs, il tombe entièrement dans la superstition de son temps, suivant laquelle l'apparition d'une comète, lancée par Dieu lui-même à travers l'espace, devait être regardée comme le présage d'évènements importants sur la Terre. Aussi conclut-il sa description par une fervente prière, demandant que les calamités, dont les signes précurseurs étaient apparus, fussent détournées de la Patrie et de l'Eglise. Au reste, il existe aussi une description de la même comète par Kepler, dans laquelle celui-ci applique l'astrologie judiciaire à cette apparition et annonce les malheurs qui en seront la suite. Il fallut, pour mettre fin à cette superstition, la découverte de Newton, montrant que le mouvement des comètes est soumis aux mêmes lois et régi par les mêmes causes que celui des corps du système solaire.

Snellius s'est aussi occupé de l'art nautique, auquel il a consacré un livre [1]) qui, très utile en son temps, n'a plus guère de valeur aujourd'hui; on y trouve pourtant une description très exacte de la loxodrome et de ses propriétés.

Son œuvre principale, la seule qui perpétue son nom dans

---

1) *Tiphys Batavus de navium cursibus et re navali*, *L.B.*. 1624.

l'histoire des sciences, est l'*Eratosthenes Batavus* [1]), publié en 1617, à Leyde, et qui contient ses recherches sur la détermination de la vraie grandeur de la Terre. Le nom de l'ouvrage est emprunté de celui du célèbre savant d'Alexandrie, qui vivait environ deux siècles avant le commencenent de notre ère et qui entreprit, le premier, de déterminer la circonférence de notre globe. Cette détermination, toutefois, comme toutes celles de l'antiquité, était extrêmement imparfaite; elle reposait sur la mesure directe d'une petite partie du méridien, mesure effectuée en comptant le nombre des pas nécessaires pour parcourir la distance en question. Rien d'étonnant à ce que, par une pareille voie, le but n'ait pu être atteint.

Comme introduction, Snellius donne un aperçu historique de toutes les tentatives qui ont été faites, dans l'antiquité, au moyen âge et jusqu'à son siècle, pour déterminer la circonférence de la Terre; il montre les défauts de ces divers essais, et arrive ainsi à conclure que, sur cette importante question, rien d'essentiel n'a été accompli, que tout reste encore à faire. Dans la seconde et principale partie de l'ouvrage, il expose la méthode qu'il a imaginée pour exécuter ses mesures, les calculs auxquels il les a soumises et les résultats qu'il en a déduits.

Il commence, comme le sujet le demandait, par déterminer avec précision l'unité de mesure, pour laquelle il choisit le pied du Rhin ou de Leyde, qu'il compare aux autres unités de longueur de l'époque. Un point très remarquable est que, contrairement à l'usage du temps, mais pour la facilité des mesures et des calculs, il divise sa mesure en parties décimales, montrant ainsi, longtemps avant la découverte et l'introduction du système décimal de mesures., l'utilité et les grands avantages d'un pareil mode de division. Ensuite il passe à l'exposition de la méthode qui le conduira au but désiré. Etant admise la figure sphérique de la

---

1) Le titre complet est: *Eratosthenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate*, *L.B.*, 1617.

Terre, il s'agit de mesurer une partie d'un méridien et de déterminer la différence correspondante de latitude géographique. Autant de fois cette différence est comprise dans la circonférence du cercle, autant de fois la circonférence de la Terre est plus grande que l'arc mesuré. La difficulté gît surtout dans la mesure; il ne faut pas songer à exécuter cette opération directement, car nulle part la distance de deux lieux, situés sur le même méridien, ne peut être mesurée en ligne droite et horizontale. Snellius imagine donc autre chose. Partant de l'impossibilité de cette mesure directe, il propose de mesurer dans une plaine, n'importe dans quelle direction, une distance qui formera la *base* de la mesure; d'en déduire, par la mesure d'angles et le calcul de triangles, la distance d'autres points, et, en continuant de cette manière, par un enchaînement de triangles, dont on mesure les angles et calcule les côtés, d'obtenir la distance des deux points extrêmes du réseau, lesquels n'ont pas besoin d'être situés sur le même méridien, une détermination d'azimut et un calcul simple suffisant pour la réduction à cette situation. D'un autre côté, on peut aussi, en mesurant la hauteur du pôle en chacun des deux points, trouver leur différence de latitude géographique, en déduire par une proportion la longueur du degré, et finalement arriver à connaître la longueur de la circonférence de la Terre.

Snellius ne s'est pas contenté d'indiquer la méthode; il l'a aussi mise en pratique, dans la remarquable mesure effectuée entre Alkmaar et Bergen-op-Zoom. Il commença par déterminer la distance de Leyde au village voisin Soeterwoude. A cet effet, dans la plaine qui s'étend entre ces deux localités, il mesura directement, avec une règle en fer, une base, d'où, en mesurant les angles que formaient à chaque extrémité de la base les rayons visuels menés au point à déterminer et à l'autre extrémité de la base, il déduisit la distance des deux lieux en question. L'instrument qui lui servait à mesurer les angles était un quart de cercle en cuivre, d'un rayon de deux pieds. La mesure de la base et des angles, ainsi que les calculs dont elle avait fourni

les éléments, furent exécutés avec le plus grand soin et la plus grande exactitude; c'est sur la distance ainsi trouvée, que Snellius fonda tout le reste du travail.

Son premier triangle fut élevé sur la base Leyde—Soeterwoude, avec le sommet à Wassenaar; ensuite il passa à Voorschoten, puis à La Haye. Par là était obtenue la distance de Leyde à La Haye. Successivement, il étendit alors ses triangles à: Gouda, Dordrecht, Rotterdam, Utrecht, Oudewater, Montfoort, Woerden, Harlem, Amsterdam, Alkmaar; de l'autre côté, à: Bommel, Bréda, Willemstad, Bergen-op-Zoom. En mesurant chaque fois les angles sous lesquels la nouvelle station se présentait par rapport à celles qui étaient déjà déterminées, et en calculant à l'aide de ces angles les distances de cette station aux précédentes, il obtint un réseau de triangles, dont Alkmaar était l'extrémité nord, Bergen-op-Zoom l'extrémité sud. La distance de ces deux points put donc être calculée à son tour et réduite au méridien de Leyde. Il détermina ensuite la hauteur du pôle tant à Alkmaar qu'à Bergen-op-Zoom: la différence était aussi celle des latitudes géographiques. Une simple proportion lui donna alors la longueur d'un degré, qu'il fixa à 28500 perches du Rhin. De là s'ensuit pour la circonférence du globe terrestre, supposée circulaire, 10.260.000 perches du Rhin, soit 38.660.364 mètres.

La mesure de Snellius ne possède donc pas une très grande précision. En partie, cela doit être attribué à ce que les instruments avec lesquels il dut opérer étaient très imparfaits, surtout en comparaison des appareils délicats qui servent aux opérations géodésiques actuelles. Les calculs de Snellius n'ont pas non plus le degré d'exactitude nécessaire, ce qui tient à ce que le calcul des triangles devait se faire par voie trigonométrique et que Snellius n'avait pas encore à sa disposition les tables de logarithmes; il dut même commencer par calculer lui-même, d'une manière très pénible, une table de sinus et de tangentes. Mais l'erreur la plus grande provient du peu d'exactitude de la détermination de la hauteur polaire

d'Alkmaar et de Bergen-op-Zoom; pour la première il admit 52°40′30″, et elle est 52°38′34″; pour la seconde il prit 51°29′, et elle est 51°28°47″. Cela fait sur la différence une erreur d'environ 2 minutes, et on comprend quelle influence cette erreur dut avoir sur le résultat. Aussi la mesure de Snellius eut-elle à subir, environ un siècle plus tard, une critique tranchante de la part de Cassini; mais l'honneur de notre compatriote fut dignement défendu par Musschenbroek [1]), s'appuyant, à cet effet, sur des manuscrits laissés par Snellius. Il montre que Snellius avait accompli sa mesure et son calcul, non pour fixer définitivement les dimensions de la Terre, mais comme simple épreuve de sa méthode. Personne n'était, plus que lui, convaincu de l'impérfection de son travail; aussi, après que son ouvrage eut paru, il continua activement, avec ses élèves, à exécuter des mesures aux environs de Leyde et à corriger ses calculs; il prolongea même les opérations jusqu'à Anvers et Malines. Il était sur le point de publier ses nouvelles recherches lorsque, dans l'hiver de 1622, les environs de Leyde furent inondés et l'eau prise par la gelée. Il jugea que c'était là une excellente occasion pour mesurer avec ses élèves, sur la nappe unie de la glace, une nouvelle base. Avant, toutefois, que le travail considérable, ainsi inauguré, fût prêt à être livré à l'impression, Snellius était atteint de la maladie qui devait entraîner sa mort et mettre par là, inopinément, un terme à ses recherches. Musschenbroek a refait les calculs de Snellius avec la nouvelle base et les nouvelles mesures angulaires, et il a trouvé ainsi un résultat beaucoup plus rapproché de la valeur réelle. Mais, déjà à ce moment, ce résultat ne présentait plus qu'un intérêt historique, car, dans le siècle écoulé depuis le premier travail de Snellius, les mesures de degré avaient tellement gagné en précision, que l'œuvre simple, accomplie par lui, ne pouvait plus soutenir la comparaison.

---

1) P. Musschenbroek, *Dissertationes physicae. De magnitudine terrae*, 1719.

Avant de prendre congé de l'*Eratosthenes Batavus*, nous devons encore y signaler un détail intéressant. On y trouve en effet (*Liber* II, *Caput* X, *Problema* XI) ce problème bien connu: trois points étant donnés, trouver leurs distances à un quatrième point par la seule observation des angles compris entre les droites menées de ce point aux trois premiers. La solution de Snellius est complète. Il donne d'abord la construction au moyen de deux segments de cercle, dont l'intersection fait connaître le lieu cherché; ensuite il passe au calcul et résout le problème en déterminant les rayons des segments et l'angle qu'ils font dans un des points donnés. Snellius ne se sert pas de ce problème pour le réseau de triangles géographiques dont il a été ci-dessus question, de sorte que la mesure du degré en reste indépendante; mais il l'applique à la détermination, par rapport à trois des clochers de Leyde, du point où il exécutait, dans cette ville, ses observations astronomiques.

Environ un siècle plus tard, Pothenot, professeur à Paris, énonça le même problème et en donna une solution, sans toutefois faire la moindre mention de Snellius [1]). Il en est résulté qu'en France, et même assez généralement en Allemagne, le problème est resté connu sous la désignation de problème de Pothenot. Le nom du Français se trouve ainsi attaché, contre toute justice, au remarquable problème que Snellius a le premier énoncé et résolu.

Il est encore une autre découverte importante, par rapport à laquelle le droit de priorité de Snellius ne peut pas être établi avec la même certitude mathématique, mais repose pourtant sur des témoignages irrécusables. Il s'agit de la loi bien connue de la réfraction de la lumière: *lorsqu'un rayon lumineux, en passant d'un milieu dans un autre, est réfracté, les sinus des angles que le rayon incident et le rayon réfracté font avec la normale sont*

1) Le Mémoire de Pothenot se trouve dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris*, t. X, 1730.

entre eux dans un rapport constant. Cette loi se rencontre pour la première fois dans un ouvrage de Descartes (*Dioptrique* 1637), écrit et publié durant le séjour que l'auteur fit au château d'Endegeest, près de Leyde. C'est pourquoi, dans les livres français, elle est appelée la loi de Descartes. Les raisons qui chez nous, et du reste aussi dans beaucoup d'ouvrages étrangers, la font attribuer à Snellius, sont les suivantes.

Commençons par dire qu'on ne la trouve dans aucun de ses ouvrages; bien plus, rien ne prouve que Snellius se soit occupé, à Leyde, d'expériences de physique: ce n'est pas à lui qu'était confié l'enseignement de cette science. Mais en 1662, c'est-à-dire près d'un demi-siècle après sa mort, parut à Amsterdam un écrit du savant Is. Vossius, dans lequel la doctrine de Descartes et surtout sa théorie de la lumière sont combattues, et où il est dit que Willebrord Snellius avait laissé sur la lumière un important ouvrage, en trois parties, qui lui avait été montré par le fils de W. Snellius, après la mort du père. Vossius déclare que dans cet ouvrage la propriété en question était énoncée, quoique sous une autre forme. Ailleurs il raconte que Hortensius, élève de Snellius et plus tard professeur à Amsterdam, l'avait exposée et expliquée dans ses leçons publiques, et que c'est ainsi que Descartes, durant son long séjour en Hollande, en a eu connaissance.

Un autre témoignage n'est pas moins significatif. Dans la *Dioptrica* de Christian Huygens (publiée à Leyde en 1703, donc après sa mort), on lit (p. 2 et 3) que la loi de la réfraction de la lumière, cherchée longtemps, mais en vain, par Kepler, avait été trouvée, à la suite de nombreuses expériences, par Snellius, qui l'avait exprimée de cette manière: *si l'on prolonge le rayon incident et le rayon réfracté jusqu'à ce que tous les deux rencontrent une seconde normale à la surface, les segments compris entre le pied des deux rayons et cette normale ont un rapport constant.* C'est, évidemment, la loi connue, mais sous une forme moins simple. Huygens ajoute que tout ce que Snellius a trouvé sur la lumière et décrit dans un traité spécial,

est resté inédit, mais que lui, Huygens, a lu ce traité; il admet, en outre, que Descartes aussi l'avait vu et que c'est là qu'il avait pris connaissance de la loi; qu'il l'avait reproduite, sous une forme différente et plus convenable, dans son propre ouvrage, sans indiquer la source où il l'avait puisée.

Il est très surprenant et regrettable que ce manuscrit, vu et étudié par des hommes tels que Vossius et Huygens, qui en avaient reconnu toute la valeur, n'ait jamais été publié. Ce qu'on doit déplorer encore plus, c'est qu'aujourd'hui il soit perdu sans retour: du moins, il ne se trouve pas à la bibliothèque de l'université de Leyde, et toutes les recherches, faites pour le découvrir ailleurs, sont restées infructueuses.

Dernièrement, la question a été soumise à un nouvel examen, d'un intérêt assez grand pour que nous en disions quelques mots. Dans un journal scientifique allemand [1]), M. le Dr. P. Kramer, de Halle, a écrit un article sur Descartes et la loi de la réfraction de la lumière. Il y étudie avec soin les pièces et les documents originaux et discute les points suivants, qui sont allégués contre Descartes.

1° Descartes a vécu pendant plus de vingt ans en Hollande et possédait beaucoup d'amis et de connaissances parmi les savants de ce pays;

2. Hortensius, dans ses leçons, tant publiques que privées, a communiqué la découverte de Snellius;

3. Descartes ne cite presque jamais ses sources;

4. Il ne rapporte aucune expérience par laquelle il aurait pu trouver sa loi;

5. Dans la démonstration de la loi, il s'est fort embrouillé.

Le principal de ces points, celui sur lequel en réalité toute la discussion repose, c'est le premier. M. Kramer montre, par des documents biographiques précis, que Descartes a séjourné trois fois en Hollande. La première fois, à partir du mois de

---

1) Schlömilch, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXVIIer Jahrgang. *Supplement zur historisch-literarischen Abtheilung*, 1882.

mai 1617, avec l'armée du prince Maurice, qui occupait Bréda; il resta deux ans dans cette ville et fit la connaissance de plusieurs philologues et ingénieurs, mais non celle de Snellius, qui demeurait alors à Leyde. Pour la seconde fois il visita notre pays au moment où, ayant quitté définitivement le service militaire, il retourna d'Allemagne en France, en traversant la Hollande; il passa alors deux mois (de décembre 1621 à février 1622) à la Haye, où il vécut dans la haute société. Revenu enfin, pour la troisième fois, en 1629, il resta au château d'Endegeest près de Leyde, pendant 20 ans, presque jusqu'à sa mort. C'est à ce long séjour que pensaient évidemment Vossius et Huygens, lorsqu'ils émettaient le soupçon que Descartes avait vu le traité sur la lumière de Snellius. En 1629, quand le premier arriva en Hollande, le second était mort depuis trois ans, de sorte que la conjecture n'a rien d'improbable en elle-même; mais M. Kramer établit que, déjà avant son dernier voyage en Hollande, Descartes avait accompli ses recherches sur la lumière et en avait communiqué les principaux résultats à ses amis, dans ses lettres. S'il avait eu connaissance de la découverte de Snellius, c'est donc pendant son premier ou son second séjour qu'il aurait dû en être instruit; or, cela n'est pas admissible, Snellius n'ayant probablement trouvé sa loi et écrit son livre qu'à une date postérieure.

Sur les autres points ci-dessus énumérés, M. Kramer s'étend moins. Il expose que Descartes n'a rien pu apprendre de Hortensius; que la noblesse du caractère de Descartes ne permet pas de supposer qu'il se soit approprié une si importante découverte, sans citer le nom de l'auteur véritable; qu'il n'avait pas besoin d'expériences pour établir la loi, vu que sa démonstration est théorique et parfaitement exacte; qu'en outre, il a énoncé la loi sous une forme meilleure que celle qui lui a été donnée par Snellius.

On voit donc que la question capitale est celle-ci: à quel moment Snellius a-t-il trouvé et communiqué la loi concernant la réfraction de la lumière? Si c'est après 1621, il y a de fortes

présomptions en faveur de Descartes; si c'est avant, non seulement la possibilité, mais même la probabilité existe qu'il en a eu connaissance durant son premier ou son second séjour en Hollande, par l'intermédiaire d'un des nombreux savants avec qui il était en relation.

Malheureusement, rien de certain ne peut être dit au sujet de la date où Snellius a découvert et formulé sa loi. Probablement il s'était déjà occupé de bonne heure, alors qu'il avait commerce avec Kepler, de recherches sur la lumière. Mais, à cette époque, il n'avait évidemment pas encore trouvé la loi, puisque Kepler, qui écrivit un important ouvrage sur la lumière, l'avait cherchée sans succès. C'est donc à Leyde que Snellius a dû faire sa découverte. On ignore s'il y a donné aussi des leçons de physique; nulle part la chose n'est mentionnée. La physique était enseignée par le professeur Jaccheus; toutefois, d'après les Archives de l'université, les leçons de celui-ci subirent une interruption de 1619 à 1623. Il est donc possible que, durant cette période, Snellius ait été chargé de l'enseignement de la physique, et qu'à cette occasion il se soit livré à des recherches optiques et ait rédigé son manuscrit, pour lui servir de guide dans son cours. Si tel est le cas, il n'y a vraiment aucune preuve concluante pour l'accusation que Vossius et Huygens ont portée contre Descartes, après sa mort, alors qu'il ne pouvait plus se défendre.

En tout cas, la gloire de Snellius n'en serait nullement atteinte. Il reste le premier auteur de l'importante découverte qui forme le fondement de l'optique. A Descartes, — puisqu'une inculpation sans preuves suffisantes doit être retirée, — sera reconnu l'honneur d'avoir trouvé la loi de son côté et de lui avoir donné, le premier, une publicité générale.

Puisse le même sentiment d'équité amener enfin les savants français et allemands à rendre aussi à Snellius l'honneur qui lui revient légitimement, en attachant son nom au remarquable théorème géométrique dont on lui est redevable.

LEYDE, Décembre 1883.

LE POTÉTOMÈTRE,

APPAREIL SERVANT À MESURER L'ASPIRATION DE L'EAU PAR LES PLANTES;

PAR

J. W. MOLL.

Je donne le nom de potétomètre (de ποτὴς, boisson) à un appareil que j'ai construit pour mesurer exactement la quantité de liquide qui est aspirée, dans un certain espace de temps, par une partie de plante, telle, par exemple, qu'une branche garnie de feuilles [1]).

Cet appareil me paraît être exempt de divers défauts, dont sont affectés d'autres appareils analogues, et se prêter parfaitement tant aux recherches concernant le mouvement et l'évaporation de l'eau, qu'aux expériences de cours.

Dans son *Handbuch der Experimental-Physiologie der Pflanzen*, p. 224, M. Sachs a décrit un instrument de ce genre. Il est composé essentiellement d'un mince tube de verre recourbé en U, dont la branche la plus courte se termine en une partie élargie. Le tube est rempli d'eau, et dans le bouchon qui ferme

---

1) L'appareil ici décrit est construit, exactement suivant mes indications, par M. C. Desaga, fabricant d'instruments de physique à Heidelberg. Le prix, sans le pied, est de 12 marcs.

la partie élargie on fixe, outre l'organe végétal qu'on veut étudier, un thermomètre. Celui-ci, dont le réservoir plonge dans l'eau, doit pouvoir glisser facilement dans le bouchon. A mesure que le rameau mis en expérience absorbe de l'eau, pour réparer la perte produite par l'évaporation, le niveau baisse naturellement dans la branche longue et étroite du tube; si celle-ci est calibrée, on peut y lire la quantité d'eau absorbée dans un certain laps de temps.

L'inconvénient de cette disposition, c'est que la pression sous laquelle se trouve la section aspirante du rameau diminue pendant tout le cours de l'expérience, à mesure que le niveau de l'eau baisse dans la branche ouverte du tube. Pour obvier jusqu'à un certain point à ce défaut, le thermomètre, ainsi que je l'ai dit, peut glisser dans le bouchon. En l'enfonçant davantage, on fait remonter l'eau dans le tube ouvert, et de cette manière on peut mesurer chaque fois l'intervalle de temps, nécessaire pour absorber la quantité d'eau, comprise entre deux points fixés d'avance. Même alors toutefois, la pression est encore incessamment variable. On ne pent d'ailleurs continuer de la sorte que jusqu'à ce que le thermomètre ait été descendu aussi bas que possible. A ce moment, la quantité d'eau absorbée est donc égale au volume de la partie du thermomètre qui a été immergée successivement. Veut-on poursuivre l'expérience, il faut remonter le thermomètre, puis ajouter de nouveau, dans la branche ouverte du tube, la quantité d'eau nécessaire.

Légèrement modifié dans sa forme, et sous le nom de transpiromètre, cet instrument est aussi représenté dans le *Leerboek der Plantenphysiologie* de M. Hugo de Vries, p. 159.

J'ai essayé d'y apporter quelques perfectionnements et c'est ainsi qu'a pris naissance le potétomètre, dont je vais maintenant donner la description.

En premier lieu, jai cherché à obtenir que la pression exercée par le liquide sur le rameau coupé restât, pendant toute la durée de l'expérience, parfaitement constante, condition qui peut certainement être posée à bon droit, mais à laquelle ne satisfait

pas le transpiromètre de Sachs. Cette première partie du problème a été résolue par l'application du principe du flacon de Mariotte.

En second lieu, l'emploi du transpiromètre astreint l'observateur à déplacer continuellement le thermomètre et, dès que celui-ci est entièrement enfoncé, donc au bout d'un laps de temps assez court, à reverser de l'eau dans le tube. Avec le le potétomètre, au contraire, on peut laisser absorber, un volume de 15 centimètres cubes d'eau, sans être obligé de rien changer ou déplacer à l'appareil. Si l'expérience doit être prolongée au-delà, on peut en quelques secondes, pour ainsi dire sans interrompre l'observation, restituer l'eau nécessaire.

Enfin, mon appareil permet d'atteindre dans la mesure un degré d'exactitude suffisant, car la lecture peut se faire, sans incertitude, à moins de 0,01 cent. cube près.

Le potétomètre est disposé comme le montre la fig. 1, Planche VI. L'appareil proprement dit, supporté par le pied *A*, est construit tout en verre. Le tube *a b* est divisé sur une capacité de 15 centimètres cubes, c'est-à-dire jusqu'au point *c*, en dixièmes de centimètre cube. Comme les traits de division sont éloignés l'un de l'autre d'environ $1^{mm},3$, il est facile, avec peu d'habitude, d'estimer d'une manière suffisamment certaine une différence de niveau correspondant à $0^{cc},01$. L'abaissement de niveau du liquide est si régulier que, de ce côté non plus, il n'y a aucune difficulté.

La partie élargie *b d* du tube possède deux ouvertures. L'une *e* est fermée par un bouchon de liège, que traverse un petit tube de verre *f* ouvert aux deux extrémités et sur lequel nous reviendrons plus loin. La seconde ouverture communique avec le tube deux fois recourbé *g h*, qui est élargi en *h*. Cette partie élargie est également pourvue d'un bouchon de liège, dans lequel on passe un petit tube *i* ayant un diamètre intérieur à peu près égal à l'épaisseur du rameau ou du pétiole qui doit être soumis à l'expérience. Celui-ci, comme le montre

la figure, est fixé dans le tube au moyen d'un petit caoutchouc et de deux ligatures, ce qui donne une occlusion parfaitement étanche et hermétique.

Qu'on se figure maintenant les deux robinets *a* et *d* fermés, l'appareil entier rempli d'eau dans toutes ses parties, et le rameau fixé de telle sorte que l'extrémité sectionnée se trouve dans le plan *k l*, c'est-à-dire dans le plan qui contient aussi le tube horizontal ouvert *f*.

Lorsque le rameau absorbe de l'eau, une petite bulle d'air pénètre dans l'appareil par le tube *f* et va se loger au haut du tube *a b*. Par l'abaissement du niveau du liquide dans ce tube on peut donc apprécier immédiatement la quantité d'eau aspirée. La pression étant la même dans tous les points du plan horizontal *k l*, la section du rameau reste constamment sous la pression atmosphérique, qui règne à la hauteur du tube *f*, tandis que l'air emprisonné au-dessus de la colonne d'eau, dans le tube *a b*, se trouve à un état de raréfaction plus ou moins grande.

De cette manière il est satisfait, comme on le voit, à la condition qu'aucun changement ne survienne dans la pression de l'eau sur la surface absorbante du rameau.

Je vais dire maintenant comment on amène l'appareil au point où il est prêt à servir, après quoi je fixerai l'attention sur une couple de détails de construction, nécessaires pour assurer l'exactitude des résultats.

Lorsqu'on veut faire une expérience avec l'appareil, on commence par fermer le tube *f*, en le recouvrant d'un bout de tube de caoutchouc muni d'une pince de serrage. A chacun des deux tubes en *a* et *d* on adapte un tube de caoutchouc de longueur un peu plus grande, et on ouvre les robinets en verre *a* et *d*. Le petit tube de caoutchouc *i*, dans lequel sera fixée ultérieurement la plante, est également fermé au moyen d'une pince de serrage. Le tube adapté à *d* pend dans un verre contenant de l'eau.

En produisant avec les lèvres une aspiration en *a*, on fait monter l'eau, jusqu'à une assez grande hauteur, dans le tube *a b*. On ferme alors le robinet *d*, puis on ouvre la pince de serrage en *i*, jusqu'à ce que le tube *g h* et anssi le petit tube *i* se soient entièrement remplis d'eau. Pour être sûr qu'il ne reste pas de bulles d'air en *h*, sous le bouchon de liège, il faut que le tube *i* ne dépasse pas, par en bas, la face inférieure de ce bouchon.

Après avoir laissé écouler, en ouvrant un instant le robinet *d*, l'eau surabondante, on enlève la pince de serrage en *i* et, dans le petit tube maintenant rempli d'eau, on introduit le rameau coupé, de façon que la section devienne visible au-dessous du tube de caoutchouc et se trouve exactement dans le plan *k l*. Dans cette position on le fixe hermétiquement, soit par un bon fil ordinaire, soit par un bout de fil de cuivre qu'on serre à l'aide d'une pince.

Cela fait, par une nouvelle aspiration en *a*, on remplit le tube *a b* jusqu'au sommet. Ensuite on ferme les robinets *a* et *d* et on enlève la pince de serrage placée en *f*. Enfin, on ouvre un instant le robinet *d*, afin de laisser écouler autant d'eau qu'il est nécessaire pour amener le niveau du liquide, dans le tube *a b*, jusqu'au point zéro; tout est alors prêt pour l'expérience.

Les tubes de caoutchouc fixés en *a* et *d* peuvent maintenant aussi être enlevés, jusqu'au moment où l'on voudra, conformément à ce qui a été dit plus haut, remplir de nouveau le tube *a b*. Pour ce remplissage, l'observation n'aura d'ailleurs besoin d'être interrompue que pendant un petit nombre de secondes.

Quelques remarques, d'un intérêt pratique, doivent encore être faites.

Pour que l'appareil se prête à des mesures un peu exactes, il faut que les bulles d'air, qui montent par le petit tube *f*, ne soient pas trop grosses. Sans doute, le volume de ces bulles est indifférent sous un certain rapport, à savoir, lorsqu'on a

soin de n'observer la hauteur du liquide qu'immédiatement après l'ascension d'une bulle. Mais, en l'absence des précautions que je vais mentionner, les bulles deviennent si grosses que, vu les faibles quantités d'eau absorbées par une seule feuille ou par un petit nombre de feuilles, il ne serait pas possible d'exécuter des mesures à de courts intervalles de temps. Et pourtant, dans différentes recherches, de pareilles mesures peuvent être nécessaires.

Je me suis donc appliqué à rendre les bulles d'air si petites que leur volume puisse être négligé et que, par suite, l'observation puisse avoir lieu *à un instant quelconque.* Pour cela, la condition que je me suis imposée, c'est que les bulles ne dépassent pas le volume de 0,01 centimètre cube. Ce résultat a été obtenu de la manière suivante.

En premier lieu, le petit tube *f* ne doit être, intérieurement, ni trop large, ni trop étroit. Le diamètre convenable est d'environ 1,8 millimètre; quant à l'épaisseur des parois, elle est indifférente.

Lorsque le tube est trop large, les bulles d'air deviennent naturellement trop grosses; mais la même chose arrive aussi quand le tube est trop étroit. L'action capillaire est alors si forte que, à chaque sortie d'une bulle d'air, une colonne d'eau d'une certaine longueur est attirée dans le tube *f*. Avant que cette résistance puisse être vaincue, la tension de l'air confiné dans le haut du tube *a b* doit avoir subi une diminution assez notable, c'est-à-dire, la plante doit avoir absorbé une assez grande quantité d'eau; aussi la bulle d'air, qui va remplacer cette eau, devient-elle trop grosse. Le diamètre du tube *f* est donc de la plus haute importance pour l'exactitude des mesures.

En second lieu, l'expérience m'a appris que celle des deux extrémités du tube *f* qui se trouve à l'intérieur du tube *b d* doit avoir été usée avec soin sur une pierre à grain fin.

Toutefois, même en observant ces prescriptions, il n'est pas possible d'obtenir des bulles d'air de la dimension voulue; elles restent toujours encore beaucoup trop fortes. Avant de par-

venir à lever cette difficulté, j'ai essayé sans succès une foule de moyens. J'en mentionnerai brièvement une couple, parce qu'ils se présenteront comme d'eux-mêmes à l'esprit du lecteur et que, par suite, il n'est pas inutile d'en signaler expressément l'insuffisance.

D'abord, il pourrait sembler qu'on atteindrait le but avec un tube capillaire, à la seule condition d'en graisser les parois, de manière qu'elles ne soient plus mouillées par l'eau. L'expérimentation avec de pareils tubes, qui avaient été plongés dans une dissolution éthérée de cire, a toutefois donné des résultats très imparfaits.

J'ai essayé aussi de fermer le tube par une pellicule de cire à cacheter, dans laquelle je pratiquais ensuite, à l'aide d'une épingle, une fine ouverture. Les expériences de M. Pfeffer, sur l'Elodea [1]), permettaient d'espérer de ce procédé un résultat favorable. Néanmoins, de même que beaucoup d'autres, que je ne décrirai pas, il se montra tout à fait impropre, dans les conditions données, à conduire au but désiré.

Il suffit toutefois, pour empêcher que les bulles d'air ne dépassent le volume de 0,01 cent. cube, d'appliquer à l'embouchure intérieure du tube *f* la disposition qui est représentée dans la fig. 2. Elle consiste en une petite plaque de cuivre poli *a'*, maintenue en avant de l'ouverture du tube *f*, au moyen d'une autre lame de cuivre *b'*, faisant ressort autour du tube. Cette pièce *b'* glisse facilement sur le tube, de sorte qu'on peut, à volonté, placer *a'* plus ou moins près de l'extrémité, préalablement aplanie et usée sur la meule.

En amenant la plaque *a'* à la distance convenable de cette extrémité, c'est-à-dire, à environ 1 milimètre, on verra que les bulles d'air ascendantes deviennent immédiatement beaucoup plus petites et, pour les dimensions données à mon appareil, ne dépassent jamais le volume de 0,01 cent. cube.

Naturellement, lorsqu'on voudra se servir du potétomètre, il

---

[1]) *Botan. Zeit.*, 1872, p. 436–437.

pourra être nécessaire de faire subir à la pièce *b'* quelques petits déplacements à droite et à gauche, avant d'avoir trouvé la mesure exacte. Si la distance est prise trop grande, la plaque manque son effet et les bulles d'air restent trop volumineuses. La plaque est-elle, au contraire, trop rapprochée de l'extrémité du tube *f*, les bulles deviennent à la vérité très petites, mais, au lieu de monter une à une, elles s'échappent chaque fois au nombre de deux ou trois, ce qui fait perdre l'avantage de leur amoindrissement individuel.

Quand on observe les diverses précautions qui viennent d'être décrites, on peut, d'après l'expérience que j'en ai acquise, avoir pleine confiance dans les résultats obtenus à l'aide de cet appareil.

Avant de terminer, je dois encore dire un mot de la raison pour laquelle la capacité de la partie divisée *a c* du tube *a b* n'est que de 15 centimètres cubes.

Une bulle d'air s'échappe du tube *f* dès que, par suite de l'absorption d'eau, la différence de pression, entre l'air extérieur et l'air qui occupe le haut du tube *a c*, a atteint une certaine valeur. Quand la bulle a pénétré, il s'établit temporairement un état d'équilibre, qui peu à peu, à mesure que la plante aspire de l'eau, fait de nouveau place à un état de tension. Celui-ci, finalement, détermine de nouveau l'ascension d'une bulle.

Or, il est évident que, pour produire la susdite diminution de tension dans l'air qui occupe le haut du tube *a c*, il faut une absorption d'eau d'autant plus considérable que le volume de cet air est lui-même plus grand. Dans la même mesure grossissent alors aussi les bulles d'air. Et comme le volume de l'air contenu dans le haut du tube augmente à mesure que le niveau de l'eau s'abaisse, les bulles ascendantes deviennent de plus en plus grosses à mesure que la plante a absorbé plus d'eau.

Pour que les bulles d'air ne dépassent pas 0,01 cent. cube, même quand le niveau du liquide est descendu jusqu'au bas du tube, elles doivent donc, lorsque le tube est entièrement rempli,

avoir un volume notablement moindre. Cela est effectivement le cas dans l'appareil ci-dessus décrit, dont la disposition comporte, dans toutes les parties du tube, une exactitude d'au moins 0,01 cent. cube.

L'expérience m'a toutefois montré que, pour satisfaire à cette condition, le volume total de l'air ne doit pas s'élever à plus de 15 cent. cubes. Lorsque cette limite n'est pas franchie, il est facile, sans beaucoup de tentatives infructueuses, de trouver la bonne distance de la plaque *a'* à l'extrémité du tube *f*, tandis que, avec un volume d'air de 20 cent. cubes par exemple, cela ne réussit plus qu'après de longs tâtonnements. Pour que l'appareil présente dans toutes ses parties les mêmes garanties de précision et soit en outre d'une manœuvre facile, je n'ai donc fait diviser le tube *a b* que sur une étendue correspondant à 15 cent. cubes de capacité.

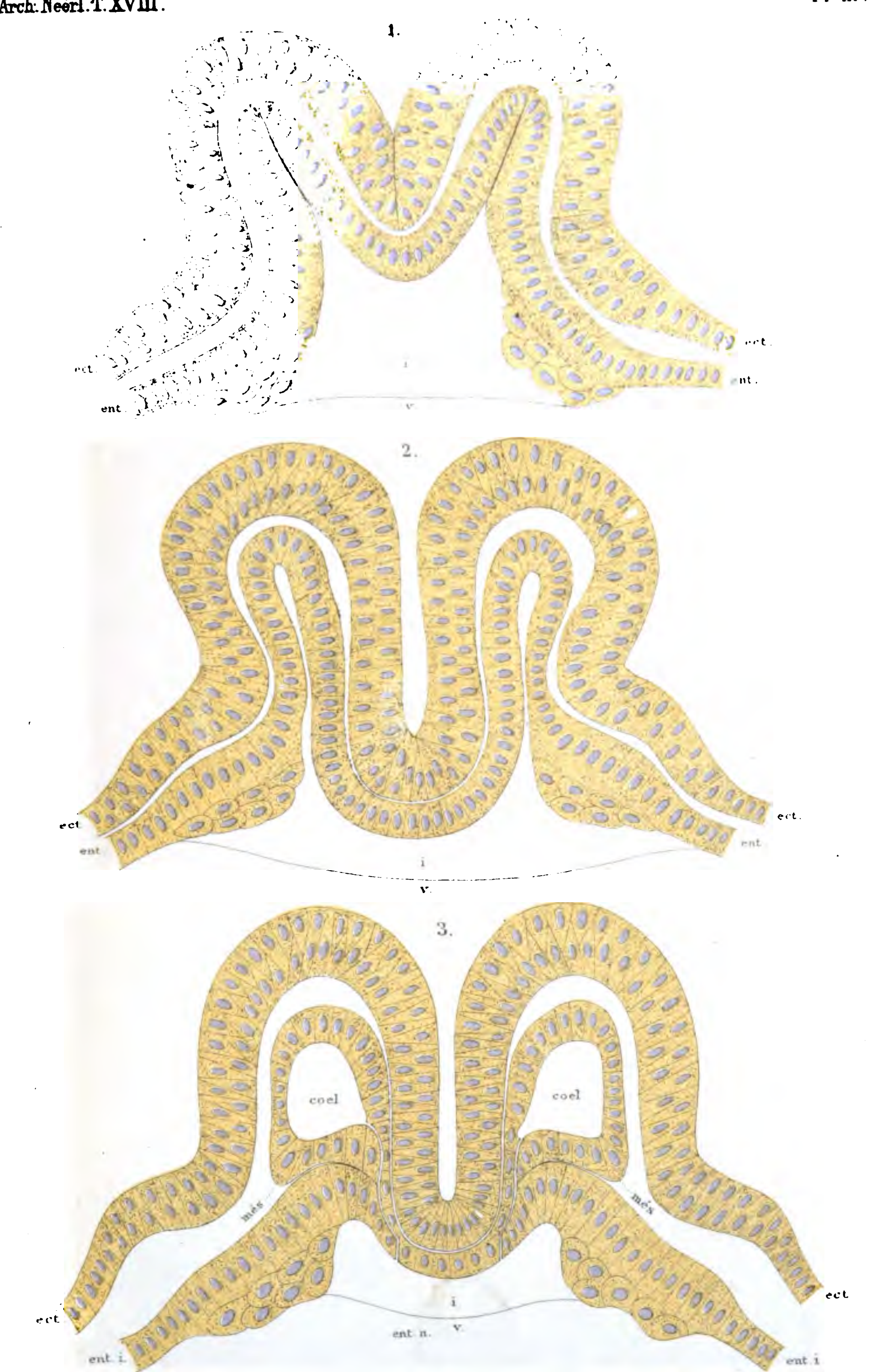
Quand on voudra essayer si la distance de la plaque *a'* à *f* est telle qu'elle doit être, on examinera donc si le volume des bulles d'air ne dépasse pas 0,01 cent. cube. La pièce *b'* sera avancée ou reculée jusqu'à ce que cette condition soit remplie. Une fois la bonne distance trouvée, il n'y a plus rien à y changer dans la suite.

Il va sans dire que, si l'on veut faire des observations d'une durée très courte, on peut aussi, au lieu de lire la hauteur du niveau de l'eau, compter le nombre des bulles d'air qui s'élèvent dans le tube. Mais on doit alors tenir compte de ce qui vient d'être dit au sujet de la grosseur des bulles et, en conséquence, commencer par déterminer, pour une distance fixe entre la valve *a'* et le tube *f*, le volume moyen des bulles, suivant que le niveau se trouve dans les différentes parties du tube *a c*. Cette détermination est d'ailleurs des plus simples: il suffit de compter le nombre des bulles pour des différences de niveau correspondant, par exemple, à une différence de volume de 1 cent. cube.

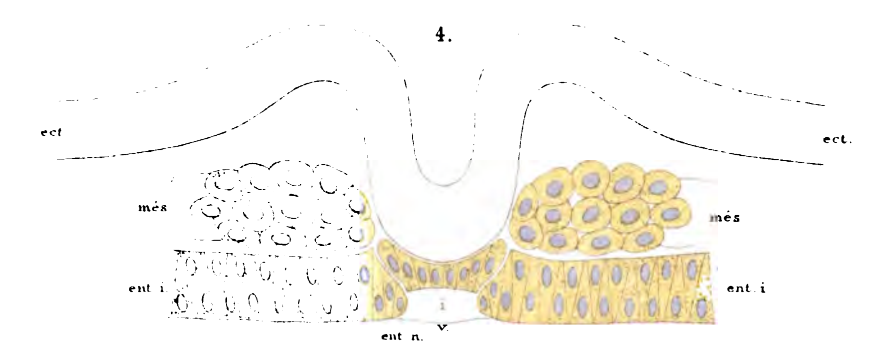
De même que le transpiromètre de M. Sachs, mais sans les inconvénients attachés à cet appareil, le potétomètre nous permet

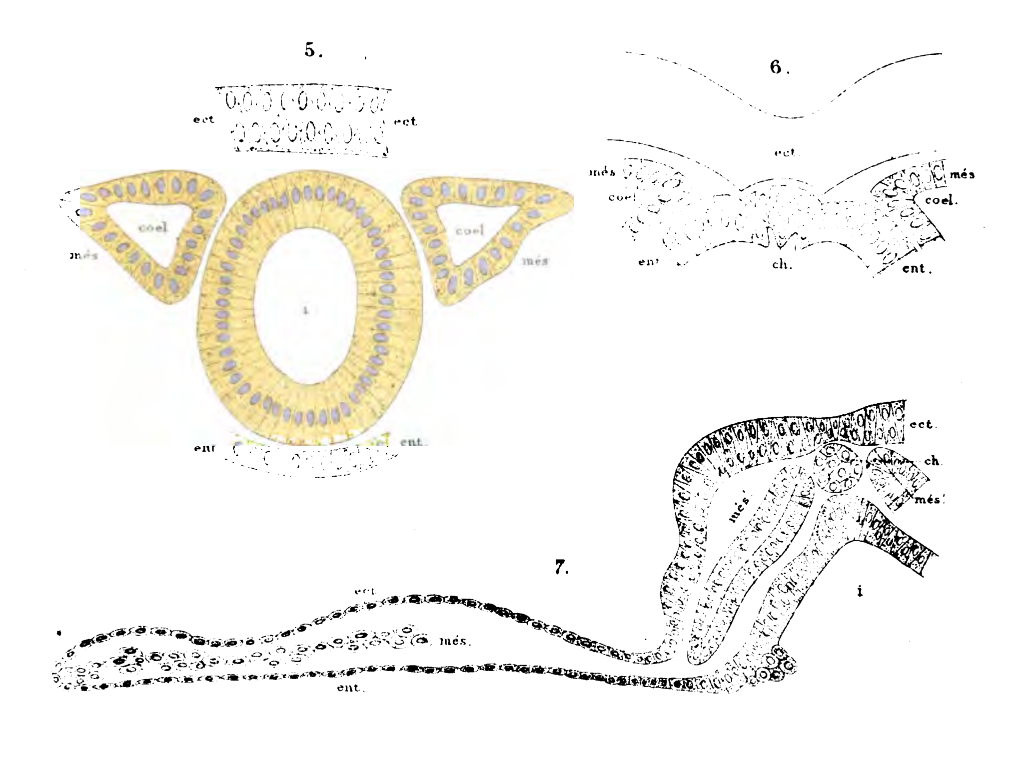
donc
de l'
d'étu
chale
Bien
en ce
degré
etc.,
Da
recou
l'air
suffis
place
avant
décrit

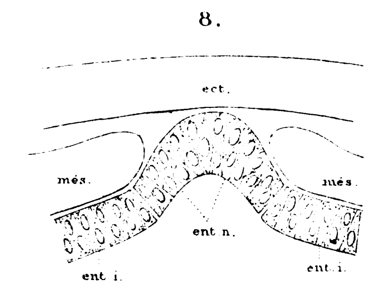
1)
t. XV

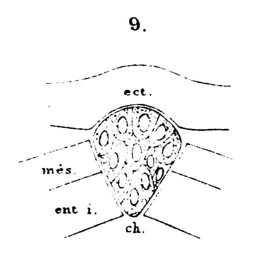


C. K. Hoffmann del. A. J. Wendel sculps.



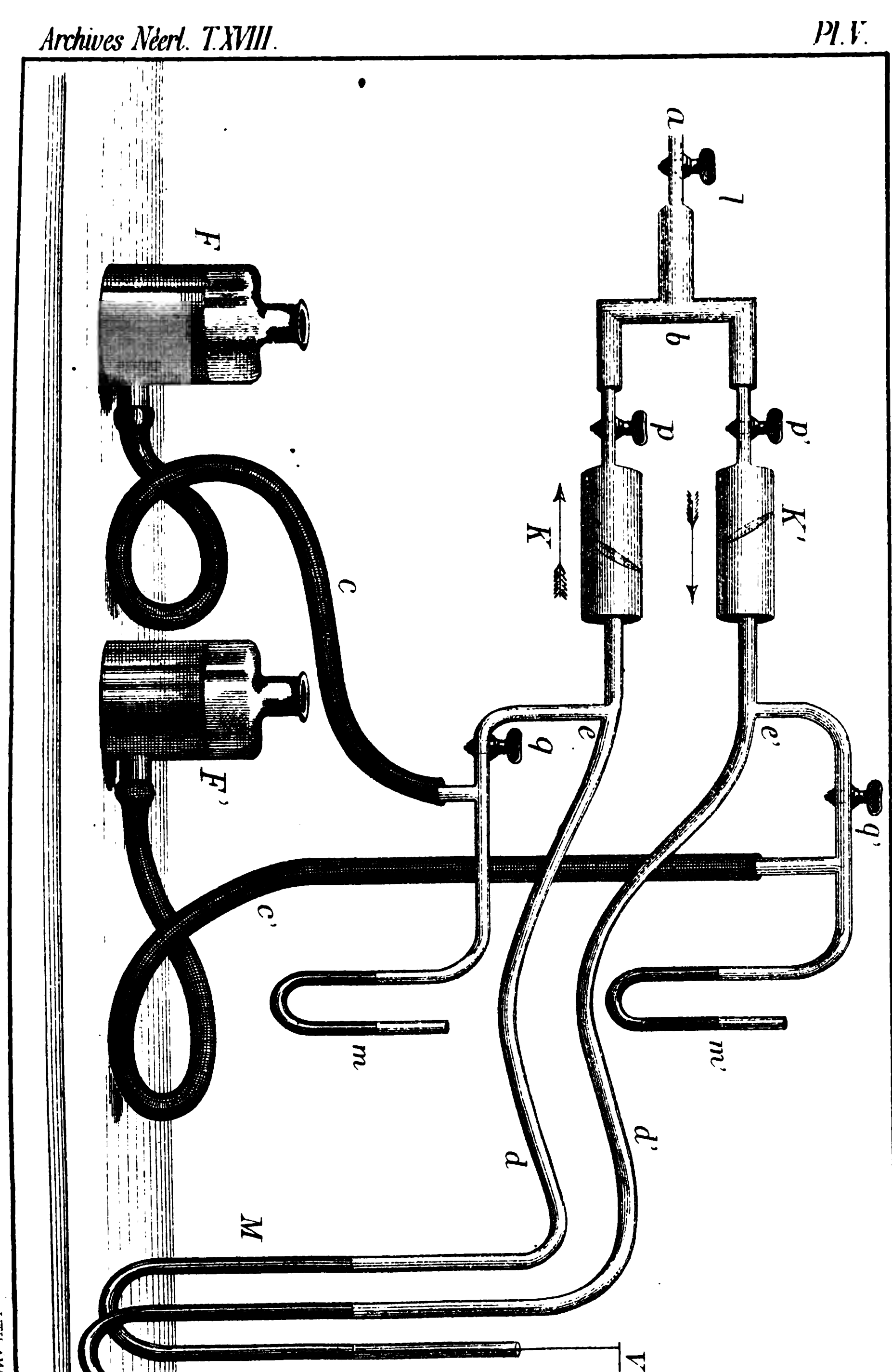






C. K. Hoffmann del.

A. J. Wendel sculps.


a
l
b
p
p'
K
K'
F
F'
c
c'
e
e'
q
q'
m
m'
d
d'
M
M'
V
V'
LITH. AMAND. AMST.

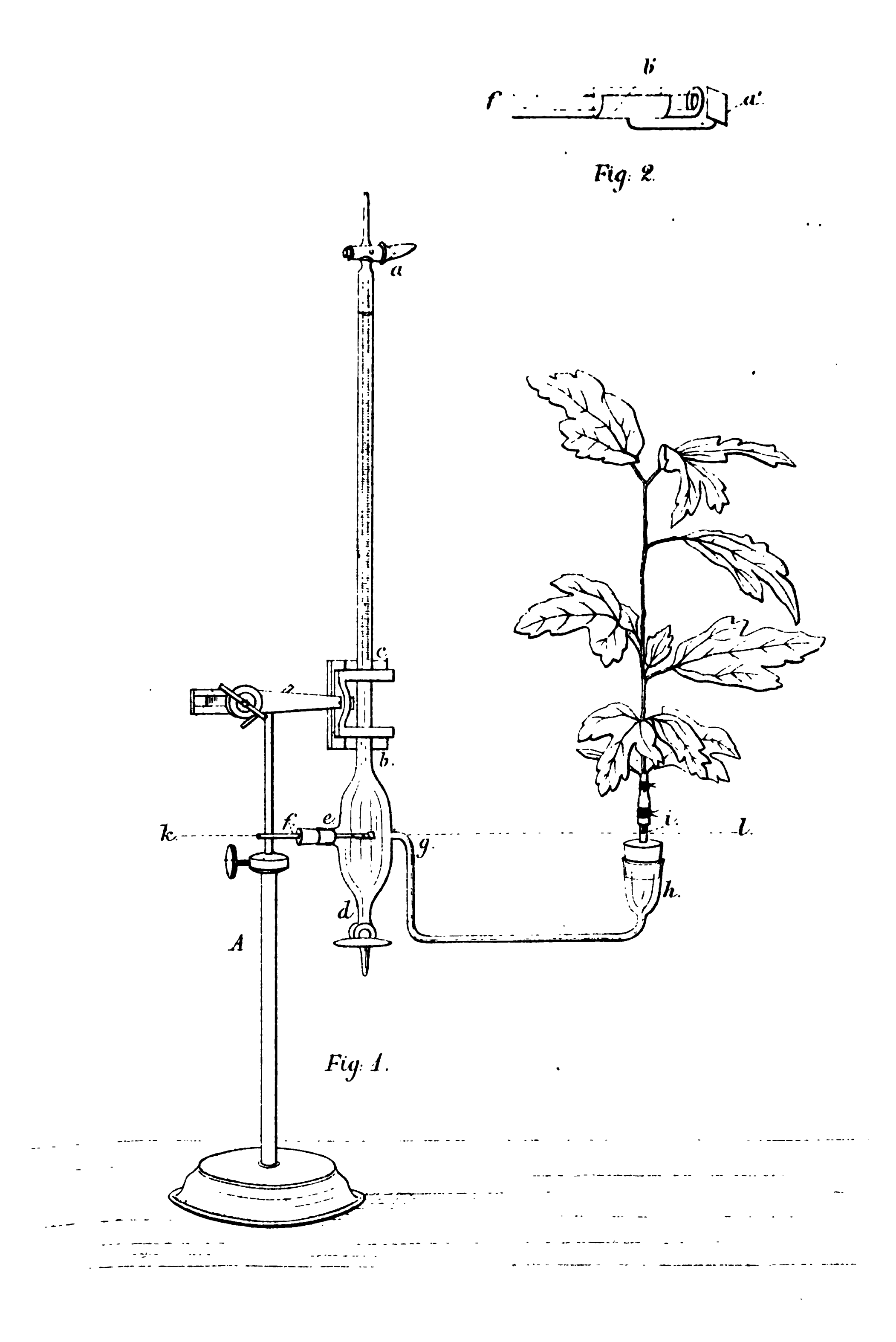


Fig. 2.

Fig. 1.





